

Índice

1. Introducción	3
1.1. Motivación	3
1.2. Estructura	4
1.3. Notación	5
2. Revisión Bibliográfica	8
2.1. Uso de Suelo (US)	8
2.2. Sistema de Transporte (ST)	12
2.3. Interacción Transporte-Uso de Suelo (ST&US)	15
3. Modelo de asignación de viajes con localización de actividades	17
3.1. Extensión a localización de un tipo de hogar	17
3.2. Extensión a varios tipos de hogar	20
4. Inclusión del mercado de remates en la localización	24
5. Extensión del modelo a oferta variable	34
5.1. Caso monoprodutor	34
5.2. Caso multiprodutor	36
6. Inclusión de la Distribución de viajes en el modelo	39
6.1. Elección del destino de los viajes	39
6.2. Elección de propósitos y destinos de los viajes	42
7. Inclusión de la Generación de Viajes en el Modelo	47
7.1. Generación de viajes en modelos sin elección de propósito	47
7.2. Generación de viajes en modelos con elección de propósito	49
8. Algoritmo de resolución, simulación del modelo y extensiones	51
8.1. Algoritmo	51
8.2. Extensión a saturación máxima en arcos de transporte	54
8.3. Simulaciones	56

9. Conclusiones y Trabajo Futuro	63
10. Referencias	64
11. Apendice	66

1. Introducción

1.1. Motivación

Existe una fuerte relación entre el sistema de transporte y la localización de actividades: mientras la localización es determinante en la generación y atracción de viajes en cada zona, el sistema de transporte, a través de la accesibilidad de las localizaciones, influye fuertemente en la elección de éstas. Lo anterior define el problema de interacción entre los equilibrios de estos sistemas, cuya modelación es el objetivo y motivación de este trabajo.

La estructura de redes es la base en el desarrollo de esta tesis, dada la gran flexibilidad que presenta para modelar distintos niveles de decisión e interacciones. En el caso particular de la interacción entre el sistema de transporte y el uso del suelo (ST&US), se puede considerar una red abstracta que extienda a la red de transporte con el fin de representar los procesos de decisión de localización a través de nuevos arcos y nodos (ver Figura 1). De este modo, las elecciones de localización son representadas a través del flujo de hogares por los arcos de localización que salen de los nodos superiores de la red extendida, los cuales representan la demanda inmobiliaria de los hogares, y llegan a los nodos de la red de transporte, que representan las zonas en la red física. La elección de los arcos de localización dependen del nivel de servicio de la red de transporte en cada zona. Por su parte, una vez localizados, los hogares generan viajes a los distintos propósitos, los cuales se distribuyen sobre la red de transporte modificando el nivel de servicio al cambiar los flujos sobre los arcos de esta red. Cabe señalar que para la modelación de la interacción ST&US es necesario que exista consistencia entre flujos de hogares y flujos de viajes individuales en los nodos de interacción entre arcos de localización y arcos de la red de transporte.

En este trabajo se estudia el equilibrio global estático ST&US a través de la definición de una función objetivo sobre la red extendida. Se pretende que el óptimo del problema de optimización reproduzca simultáneamente las condiciones de equilibrio definidas en dos modelos planteados previamente: “Random Bidding and Supply Model” (RB&SM) de Martínez y Henríquez (2003) en el uso de suelo y “Markovian Traffic Equilibrium” (MTE) de Baillon y Cominetti (2004) en la red de transporte. En ambos modelos las decisiones pueden ser representadas a través del modelo logit, estructura que se busca mantener en el equilibrio global de ambos sistemas. Se puede asegurar existencia y unicidad de la solución bajo condiciones razonables sobre la función objetivo, lo cual marca una diferencia con respecto a los modelos anteriormente desarrollados que modelan la interacción ST&US, dónde sólo se proponen heurísticas de búsqueda del equilibrio, sin asegurar la convergencia de los métodos.

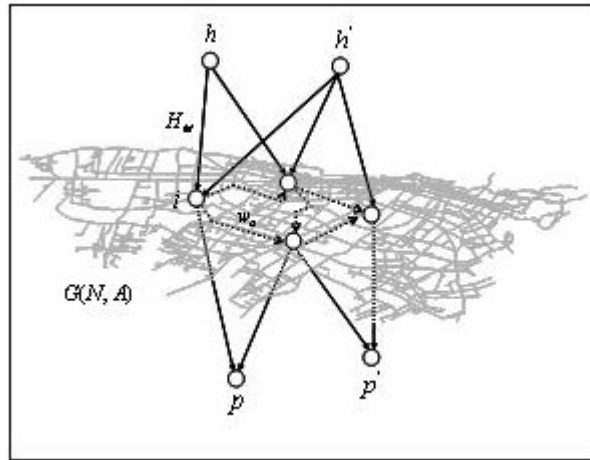


Figura 1: Red Extendida

1.2. Estructura

Esta tesis está formada por nueve capítulos. En el capítulo dos se revisan y comentan los modelos presentes en la literatura dedicados a la interacción ST&US, y algunos modelos de interés del sistema de transporte (ST) y de uso de suelo (US), como son MTE y RB&SM respectivamente, con el fin de rescatar las fortalezas y debilidades de cada uno y sentar las bases para la presentación del modelo propuesto.

En el capítulo tres se muestra un primer avance, al extender el modelo MTE propuesto por Baillon y Cominetti (2004) a la localización de uno y varios tipos de hogares considerando funciones de costo conocidas en los arcos de localización.

En el capítulo cuatro se levanta el supuesto de conocer dichas funciones de costo para incluir el mercado de remates en las decisiones de localización para así reproducir, además de las condiciones definidas en MTE para la red de transporte, las condiciones de equilibrio definidas en RB&SM. Esta modificación corresponde a la principal contribución de este trabajo, en base a la cual se generan extensiones en los capítulos siguientes.

En el capítulo cinco, se extiende el modelo al caso oferta variable para el caso mono-productivo y multiproductivo.

En el capítulo seis y siete se incluyen la distribución y generación de viajes en el modelo, respectivamente.

En el capítulo ocho se presenta un algoritmo para la búsqueda del equilibrio y se demuestra la convergencia del mismo. Además se presentan los resultados de simulaciones del modelo y la extensión de los resultados obtenidos para el caso en que los arcos de la red de transporte posean capacidad de saturación máxima.

Finalmente, en el capítulo nueve se entregan las conclusiones generales del trabajo y

las líneas futuras de investigación.

1.3. Notación

- H : conjunto de índices de tipos de hogares o firmas
- I : conjunto de índices de zonas
- N : conjunto de nodos de la red de transporte
- A : conjunto de arcos en la red de transporte
- \tilde{A} : conjunto de arcos de localización
- A_i^+ : conjunto de arcos que salen del nodo $i \in N \cup H$
- A_i^- : conjunto de arcos que llegan al nodo $i \in N \cup H$
- i_a, j_a : nodo inicial y final del arco a , respectivamente.
- $Q_j^- = \{i \in H \cup N; (i, j) \in A\}$: corresponde al conjunto de nodos que pueden alcanzar a j a través de algún arco
- $Q_j^+ = \{j_a; \forall a \in A_j^+\}$: corresponde al conjunto de nodos alcanzados por j
- D : conjunto de destinos de los viajes en la red de transporte ($D \subseteq N$)
- P : conjunto de propósitos de los viajes
- K : conjunto de empresas inmobiliarias
- H_h : número de hogares o firmas de tipo h ($h \in H$)
- S : número total de viviendas ofertadas
- S_k : número total de viviendas ofertadas por la empresa k
- S_i : número total de viviendas ofertadas en zona i
- B_h^i : disposición a pagar de un hogar tipo h por localizarse en una zona i
- b_h : medida temporal de la utilidad de los hogares tipo h obtenida en el equilibrio
- z_{hi} : componente de la disposición a pagar correspondiente a la valoración del tipo de hogar h sobre los atributos de la localización en i , sin contar los costos de transporte

- $Z_{hi}(t)$: componente de la disposición a pagar correspondiente a la valoración del tipo de hogar h sobre los atributos de la localización en i , considerando los costos de transporte
- r_i : renta en la zona i
- c_i : costo de construcción en la zona i
- π_i : probabilidad de que la empresa monopólica construya en la zona i
- $\pi_{i/k}$: probabilidad de que la empresa inmobiliaria k construya en la zona i
- H_{hi} : número de hogares tipo h que se localizan en la zona i
- $P_{h/i}$: probabilidad de que h sea mejor postor en i (“bid”)
- $P_{i/h}$: probabilidad de que h escoja para localizarse la zona i (“choice”)
- $s_a(\cdot)$: función de costos en el arco a
- t_a : costo o tiempo del arco a
- $t_a^0 = s_a(0)$: costo o tiempo a flujo libre del arco a
- g_i^d : cantidad de viajes que tienen como origen i y destino d
- g_i^{hpd} : cantidad de viajes generados por un hogar tipo h que tienen como origen i y destino d , propósito p
- τ_i^d : tiempo mínimo esperado para ir de la zona i al destino d
- $\bar{\tau}_i^d$: tiempo mínimo determinístico para ir de la zona i al destino d (tiempo de ruta mínima)
- τ_h : costo mínimo esperado por el hogar tipo h en localizarse, considerando la incidencia del transporte
- φ_i^d : función de agregación, perteneciente a la clase \mathcal{E} , que permite definir las variables τ_i^d
- \mathcal{E} : clase de funciones que pueden ser expresadas de la forma

$$\varphi(x) = \mathbb{E}(\min_{i=1 \dots n} [x_i + \epsilon_i])$$

para variables aleatorias ϵ_i tales que $\mathbb{E}(\epsilon_i) = 0$ y $\mathbb{P}(\epsilon_i - \epsilon_j = \alpha) = 0$.

- z_a^d : tiempo esperado en llegar a d tomando el arco a desde la zona i
- P_{ij}^d : probabilidad de elegir el arco $a = (i, j)$ desde la zona i para ir al destino d

- x_i^d : flujo total que sale de i hacia el destino d
- x_i^{hpd} : flujo total de viajes generados por hogares tipo h que salen de i hacia el destino d con propósito p
- v_a^d : flujo que circula por el arco a y que se dirige al destino d
- v_a^{hpd} : flujo de viajes generados por hogares tipo h que circulan por el arco a y que se dirigen al destino d con propósito p
- w_a : flujo total que circula por el arco a
- $\xi_k(r)$: utilidad máxima esperada de una empresa constructora k
- γ_h^{dp} : beneficio percibido por un hogar tipo h al viajar hacia d con propósito p , sin considerar el tiempo de viaje
- $\tau_i^{dph}(t)$: costo o tiempo percibido por un hogar tipo h al realizar un viaje desde i hacia d con propósito p
- $c_{hi}^{dp}(t) = \tau_i^{dph}(t) - \gamma_h^{dp}$: costo generalizado de un hogar tipo h por realizar un viaje desde i hacia d con propósito p
- $\alpha_{hi}^p(t)$: costo mínimo esperado de un hogar tipo h por realizar un viaje desde la zona i con propósito p , considerando las opciones de destino $d \in Q_p^-$
- ρ_{hi}^p : medida del beneficio percibido por un hogar tipo h por realizar un viaje desde i con propósito p , considerando todas las opciones de destino
- $\chi_{hi}^p(t) = \rho_{hi}^p - \alpha_{hi}^p(t)$: utilidad neta que recibe un hogar tipo h por realizar un viaje con propósito p desde i
- $U_{hi}(t)$: máxima utilidad esperada por un hogar tipo h en realizar un viaje con cualquier propósito y hacia cualquier destino
- N_h^d : cantidad de viajes hechos por la familia h con destino d
- N_h^p : cantidad de viajes hechos por la familia h con propósito p
- N_h : cantidad de viajes totales que realiza una familia tipo h
- $\Phi^\infty(t)$: función de recesión de Φ en $t \neq 0$, $\Phi^\infty(t) \triangleq \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\Phi(\lambda t) - \Phi(t)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\Phi(\lambda t)}{\lambda}$

2. Revisión Bibliográfica

En este trabajo se presenta un modelo integrado ST&US que tiene una formulación variacional del equilibrio. Se define un problema de optimización convexo cuyas ecuaciones de optimalidad reproducen las condiciones de equilibrio de dos modelos conocidos previamente, el llamado “Random Bidding and Supply Model” (RB&SM) propuesto por Martínez y Henríquez (2003) para localización urbana y el “Markovian Traffic Equilibrium” propuesto por Baillon y Cominetti (2004) para redes de transporte privado. Por ello a continuación se estudiarán estos y otros modelos de importancia en el uso de suelo y en el sistema de transporte, para luego revisar los modelos en la literatura que se dedican a la interacción entre ambos sistemas.

2.1. Uso de Suelo (US)

Un modelo fundamental para el desarrollo de esta tesis es el modelo de uso del suelo RB&SM de Martínez y Henríquez (2004). Este modelo pertenece al tipo “Bid-Rent”, que se basa en que las transacciones de bienes inmuebles corresponden a un remate, donde en cada lugar se localiza el agente que tenga la mayor disposición a pagar de todos los demandantes (“bid”). Bajo este enfoque, la disposición a pagar por cada localización describe el comportamiento de los tomadores de decisiones (reemplazando en su rol a la función de utilidad) y fue propuesta por Alonso (1965). El modelo RB&SM, es una extensión del “Random Bidding Model” (RBM) de Martínez y Donoso (2001), en que además de modelar externalidades de localización y regulaciones en la construcción, ya incorporadas en RBM, incorpora el supuesto económico que los oferentes del mercado inmobiliario definen su comportamiento basándose en maximizar una función de ganancia. En este modelo, la función de disposición a pagar de un hogar tipo h por una vivienda en la zona i , se asume estocástica y se denota B_h^i a su parte determinística¹. Además se supone que distribuye idéntica e independiente Gumbel con parámetro de dispersión μ . Luego, la expresión:

$$P_{h/i} = \frac{H_h \exp(\mu B_h^i)}{\sum_{g \in H} H_g \exp(\mu B_g^i)} \quad (1)$$

representa la probabilidad logit multinomial de que h sea mejor postor en i , enfoque presente en Ellickson (1981) y extendido en Martínez (1992). De este modo, la distribución de hogares tipo h en la zona i es $H_{hi} = S_i \cdot P_{h/i}$, donde S_i es la oferta inmobiliaria.

¹En el modelo original RB&SM la función de disposición a pagar depende del tipo de vivienda $v \in V$ que se considere además de la zona i . Sin embargo no se pierde generalidad al asumir sólo un índice i , ya que este puede representar, en conjunto, el tipo de vivienda y zona. Para esto, basta considerar un conjunto de índices del cardinal de $I \times V$.

En el modelo RB&SM se considera la existencia de interacciones entre residentes, porque estos definen la calidad del entorno en una localización, llamadas externalidades en la localización, o bien interacciones entre firmas, llamadas economía de aglomeración, o entre firmas y residentes. Cuando se incluyen tales interacciones, la función de postura depende de las variables endógenas, es decir $B_h^i(H_{\bullet,i})$, por lo que la ecuación (1) describe un punto fijo $P_{h/i} = f(P_{\bullet/i})$. En el modelo integrado de este trabajo de tesis, tales interacciones se simplifican al suponer que existen pero con desfase temporal, es decir $P^k = f(P^{k-1})$ con k el período (e.g. el año) en que se calcula el equilibrio; este supuesto define un equilibrio asociado al corto o mediano plazo.

La oferta inmobiliaria en el modelo RB&SM se modela asumiendo que los oferentes maximizan el excedente (renta del bien menos costo de producción) que se define como aleatorio y distribuido también Gumbel con parámetros $(0, \lambda)$. De esto, la siguiente expresión:

$$S_i = S \cdot \pi_i = S \cdot \frac{\exp(\lambda(r_i - c_i))}{\sum_j \exp(\lambda(r_j - c_j))} \quad (2)$$

describe la oferta inmobiliaria ofrecida en la zona i , dado que S es la oferta total. En este modelo, la renta r_i en cada localización es una variable endógena definida por la esperanza de la máxima disposición a pagar de los consumidores. Analíticamente, su expresión está dada por:

$$r_i = \frac{1}{\mu} \ln \sum_{h \in H} H_h \exp(\mu B_h^i) \quad (3)$$

que es la conocida función logsuma. Cabe notar que el modelo RB&SM considera potenciales economías de escala en la producción, suponiendo que $c_i = C_i(S_i)$. Esto hace que la ecuación (2) sea un segundo punto fijo definido por $S_i = f(S_j \quad \forall j)$.

La condición de equilibrio en el modelo RB&SM impone que todo hogar y firma se localice, vale decir:

$$H_h = \sum_i H_{hi}. \quad (4)$$

En esta condición se asume que la función de disposición a pagar es de la forma $B_h^i = z_{hi} - b_h$, donde b_h es un término que representa el nivel de utilidad del agente tipo h (en unidades monetarias) y z es una función de valoración de los atributos de la zona. Reemplazando esta función y la ecuación (3) en la ecuación (1) y ésta, a su vez, en la condición de equilibrio (4), se obtiene:

$$b_h = \frac{1}{\mu} \ln \sum_i S_i \exp(\mu(z_{hi} - r_i)) \quad \forall h \quad (5)$$

Esta ecuación contiene las rentas en el lado derecho, que, por la ecuación (3), dependen de las funciones de disposición a pagar, y por lo tanto constituye un punto fijo descrito por $b_h = f(b_\bullet)$. La solución de este punto fijo define los niveles de disposición a pagar mínimos necesarios para que todos los consumidores se localicen, o bien los niveles máximos de utilidad que se pueden alcanzar en el equilibrio.

De este modo, el equilibrio del modelo RB&SM se resume en el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$P_{h/i} = P_{h/i}(b_\bullet, P_{\bullet/i}, S_i) \quad (6)$$

$$S_i = S \cdot \pi_i(b_\bullet, P_{\bullet/\bullet}, S_\bullet) \quad (7)$$

$$b_h = b_h(b_\bullet, P_{\bullet/\bullet}, S_\bullet) \quad (8)$$

las cuales definen un punto fijo multidimensional del equilibrio en el uso del suelo. Esta ecuación de punto fijo tiene solución única para valores suficientemente pequeños de μ , lo cual impone una restricción sobre la varianza mínima necesaria en las disposiciones a pagar para asegurar unicidad de la solución.

Otro modelo de uso de suelo de gran importancia en el desarrollo de este trabajo, dentro de un enfoque de interacción espacial, es el entrópico doblemente acotado (Roy, 2004) similar a un modelo desarrollado por Wilson (1970), pero donde lo que determina la localización de actividades es la disposición a pagar de los agentes, información que se asume conocida. De este modelo también se obtiene las probabilidades logit propuestas por Ellickson (1981), debido a que el modelo de maximización de la entropía y el modelo logit multinomial son equivalentes cuando se calibra los parámetros de este último con el método de máxima verosimilitud (Anas, 1981). De esta forma, el modelo RB&SM también se puede derivar, sin considerar externalidades ni economías de escala, formulando el siguiente problema de optimización:

$$(P) \quad \underset{H_{hi}}{\text{mín}} - \sum_{\substack{i \in I \\ h \in H}} H_{hi} z_{hi} + \frac{1}{\mu} \sum_{\substack{i \in I \\ h \in H}} H_{hi} (\ln(H_{hi}) - 1)$$

s.a.

$$\sum_{i \in I} H_{hi} = H_h \quad (9)$$

$$\sum_{h \in H} H_{hi} = S_i \quad (10)$$

el cual se interpreta como la maximización del valor de la postura por atributos de la zona (primer término en la función objetivo) en un contexto estocástico (segundo término), bajo el supuesto que todos se localizan y no hay exceso de oferta (restricciones).

La única solución del problema (P) satisface que:

$$H_{hi} = S_i \cdot P_{h/i} = H_h \cdot P_{i/h} \quad (11)$$

donde

$$P_{h/i} = \frac{\exp(\mu(z_{hi} - b_h))}{\sum_{g \in H} \exp(\mu(z_{gi} - b_g))} \quad (12)$$

$$P_{i/h} = \frac{\exp(\mu(z_{hi} - r_i))}{\sum_{j \in I} \exp(\mu(z_{hj} - r_j))} = \frac{\exp(\mu(z_{hi} - b_h - r_i))}{\sum_{j \in I} \exp(\mu(z_{hj} - b_h - r_j))}. \quad (13)$$

La ecuación (11) reproduce las condiciones de equilibrio “bid-rent” especificadas en RB&SM para oferta fija, al considerar $B_h^i = z_{hi} - b_h$. Las ecuaciones (12) y (13) corresponden a las probabilidades “bid” y “choice” en la localización, respectivamente. Como se mencionó anteriormente, la probabilidad “bid” surge de asumir que en cada lugar se localiza el agente que tenga mayor disposición a pagar B_h^i , las cuales son variables aleatorias iid Gumbel con factor de escala μ . Análogamente, la probabilidad “choice” surge de asumir que en cada lugar se localiza el agente que tenga mayor excedente $B_h^i - r_i$, los cuales también se asumen variables aleatorias iid Gumbel con factor de escala μ . De este modo, el óptimo del problema de optimización (P) satisface simultáneamente ambas elecciones. El parámetro μ es inversamente proporcional a la dispersión de las variables aleatorias B_h^i y $B_h^i - r_i$ de los modelos logit multinomial antes mencionados.

De esta manera, el equilibrio en el mercado inmobiliario se obtiene a través del óptimo del problema de optimización (P), cuyas condiciones de primer orden corresponden a las condiciones de equilibrio en el uso de suelo.

Cabe señalar que el problema (P) puede ser reformulado como sigue:

$$(P') \quad \min_{H_{hi}} \sum_{\substack{i \in I \\ h \in H}} H_{hi} (\ln(H_{hi}) - 1)$$

s.a.

$$\sum_{i \in I} H_{hi} = H_h \quad (14)$$

$$\sum_{h \in H} H_{hi} = S_i \quad (15)$$

$$\sum_{h \in H} \sum_{i \in I} H_{hi} z_{hi} = Z \quad (16)$$

donde μ corresponde al multiplicador de Lagrange correspondiente a la última restricción. El hecho que esta restricción no dependa de la zona i o del tipo de hogar h , permite que se tengan simultáneamente las elecciones “bid” y “choice” en la localización, donde, desde el punto de vista del modelo logit multinomial, tanto las disposiciones a pagar como el excedente de los hogares son variables aleatorias iid Gumbel con el mismo parámetro de escala μ , y por lo tanto igual dispersión. En el caso de tener restricciones que dependan de las zonas u hogares, se tienen multiplicadores asociados a estas restricciones que tienen igual dependencia (μ_h ó μ_i). En tal caso sólo se puede obtener una de las elecciones, donde, en el caso de la elección “bid”, las disposiciones a pagar son variables aleatorias iid que distribuyen Gumbel con parámetro de escala μ_i , y en el caso de “choice”, el excedente de los hogares distribuye iid Gumbel con parámetro de escala μ_h . Esto significa que, a priori, la dispersión de las variables aleatorias involucradas no es la misma, sino que depende de la zona i o del hogar h , dependiendo del caso.

Los modelos de uso de suelo anteriormente descritos encuentran el equilibrio tomando en cuenta la importancia de la incidencia del transporte en el uso de suelo, pero considerando los costos generalizados del transporte como información exógena. Estos costos forman parte de los atributos de la zona, los cuales están representados por los términos z_{hi} .

2.2. Sistema de Transporte (ST)

Los modelos de asignación de viajes a la red pretenden determinar la ruta que seguirá cada viaje una vez elegido el destino y modo, lo cual se obtiene de modelos asociados a las etapas de distribución y partición modal (ver Ortúzar y Willumsen, 1994). Con este fin se define las condiciones de equilibrio de usuarios de Wardrop, para asignación determinística y el equilibrio estocástico (Sheffi, 1985). Otros modelos desarrollados en el área son el de Nagurney y Dong (2002a) que enuncia el problema como una inecuación variacional, reproduciendo las condiciones de Wardrop y “Markovian Traffic Equilibrium” (MTE) de Baillon y Cominetti (2004) que plantea un modelo de equilibrio markoviano en un contexto en que los usuarios tienen un comportamiento estocástico. A diferencia de otros modelos de equilibrio en redes basados en equilibrios en rutas, el equilibrio markoviano representa una toma de decisiones en cadena, donde en cada nodo el usuario decide el próximo arco como aquél que tenga tiempo esperado mínimo en llegar al destino predeterminado, sin importar las elecciones hechas anteriormente. El equilibrio se obtiene en base al óptimo de un problema de optimización definido sobre la red de transporte, de manera tal que las condiciones de primer orden que satisface el óptimo corresponden a las condiciones de equilibrio. El problema de

optimización considerado es:

$$\min_{t \in \mathbb{R}^{|A|}} \Phi(t) = \sum_{a \in A} \int_0^{t_a} s_a^{-1}(z) dz + \sum_{\substack{d \in D \\ i \neq d}} g_i^d \cdot \tau_i^d(t) \quad (17)$$

en donde A es el conjunto de los arcos, D el conjunto de nodos destino, t_a el tiempo o costo del arco a , $s_a(\cdot)$ la función de costos en arco a (es función del flujo por el arco a , w_a), g_i^d la demanda de viajes en el nodo i con destino d (se obtiene del modelo de distribución) y $\tau_i^d(\cdot)$ el mínimo tiempo esperado para ir de i a d que se define como sigue:

$$\tau_i^d(t) = \varphi_i^d(z_a^d(t)); a \in A_i^+$$

donde A_i^+ es el conjunto de arcos que salen de i y $z_a^d(t) = t_a + \tau_{j_a}^d(t)$ corresponde al tiempo esperado en llegar a d tomando el arco a desde i . Por su parte las funciones $\varphi_i^d(z)$ son funciones pertenecientes a la clase $\mathcal{E}^{(2)}$, y satisfacen que $\frac{\partial \varphi_i^d}{\partial z_a^d}(z^d) = P_{ij_a}^d$ que es la probabilidad de elegir el arco a desde i para ir a d . En el caso particular de que las variables aleatorias z distribuyan Gumbel con parámetro de escala λ_i^d , se tiene:

$$\varphi_i^d(z) = -\frac{1}{\lambda_i^d} \ln\left(\sum_{a \in A_i^+} \exp(-\lambda_i^d z_a^d)\right)$$

y

$$P_{ij_a}^d = \frac{\exp(-\lambda_i^d z_a^d)}{\sum_{b \in A_i^+} \exp(-\lambda_i^d z_b^d)}$$

A partir de aquí se definen las matrices $\widehat{P}^d(z^d) = (P_{ij}^d)_{i,j \neq d}$ y $\widehat{Q}^d(z^d) = (Q_{ia}^d)_{i \neq d, a \in A}$, con entradas:

$$P_{ij}^d = \begin{cases} \frac{\partial \varphi_i^d}{\partial z_a^d}(z^d) & \text{si } \exists a \in A \text{ tq } i = i_a \text{ y } j = j_a \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$Q_{ia}^d = \begin{cases} \frac{\partial \varphi_i^d}{\partial z_a^d}(z^d) & \text{si } i = i_a \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

²La clase \mathcal{E} corresponde a la clase de funciones $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que pueden ser expresadas de la forma $\varphi(x) = \mathbb{E}(\min_{i=1 \dots n} [x_i + \epsilon_i])$ para variables aleatorias ϵ_i tales que $\mathbb{E}(\epsilon_i) = 0$ y $\mathbb{P}(\epsilon_i - \epsilon_j = \alpha) = 0$. En Baillon y Cominetti (2004), se prueba que estas funciones son cóncavas, crecientes por componentes y satisfacen $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \mathbb{P}(x_i + \epsilon_i \leq x_j + \epsilon_j, \forall j \neq i)$, entre otros resultados.

donde P_{ij}^d se interpreta como la probabilidad de avanzar a j desde i para llegar a d utilizando un sólo arco, mientras que Q_{ia}^d corresponde a la probabilidad de avanzar por el arco a a partir de i para llegar a d .

El problema (17) garantiza existencia y unicidad de la solución, debido a que la función objetivo es estrictamente convexa y coerciva, para lo cual se debe satisfacer las siguientes hipótesis:

$$(A_0) = \begin{cases} \text{se cuenta con familias } \varphi_i^d \in \mathcal{E} \text{ con } \varphi_d^d \equiv 0 \text{ y las funciones de tiempos de} \\ \text{viaje } s_a : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ con } a \in A, \text{ deben ser estrictamente crecientes y} \\ \text{continuas con } \lim_{w_a \rightarrow \infty} s_a(w_a) = +\infty, t_a^0 = s_a(0) \geq 0 \text{ y } \varphi_i^p(t^0) > 0 \quad \forall i \neq p \end{cases}$$

Además el óptimo del problema satisface las siguientes condiciones de primer orden:

$$\forall a \in A \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t_a}(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad s_a^{-1}(t_a) = \sum_{d \in D} \sum_{i \neq d} g_i^d \cdot \frac{\partial \tau_i^d}{\partial t_a}(t). \quad (18)$$

Se demuestra a partir de la definición de $\tau_i^d(\cdot)$ que $\frac{\partial \tau}{\partial t} = [I - \widehat{P}^d(z^d)]^{-1} \widehat{Q}^d(z^d)$, donde $\frac{\partial \tau}{\partial t} = (\frac{\partial \tau_i^d}{\partial t_a})_{i \neq d, a \in A}$. Por otra parte, las ecuaciones de distribución y conservación de flujos en la red son:

$$\begin{cases} v_a^d = x_i^d \frac{\partial \varphi_i^d}{\partial z_a^d}(z^d) \quad \forall a \in A_i^+ \\ x_i^d = g_i^d + \sum_{a \in A_i^-} v_a^d \end{cases}$$

donde x_i^d corresponde al total de viajes que salen de la zona i con destino d y el término v_a^d corresponde a la parte del flujo que circula por el arco a que se dirige a d . A partir de aquí, se obtiene:

$$\begin{cases} v^d = \widehat{Q}^d(z^d)' x^d \\ x^d = g^d + \widehat{P}^d(z^d)' x^d \end{cases}$$

de donde se concluye $x^d = [I - \widehat{P}^d(z^d)']^{-1} g^d$ y $v^d = \widehat{Q}^d(z^d)' [I - \widehat{P}^d(z^d)']^{-1} g^d = (\frac{\partial \tau}{\partial t})' g^d$

De este modo, se obtiene:

$$v_a^d(t) = \langle g^d, \frac{\partial \tau^d}{\partial t_a}(t) \rangle = \sum_{i \neq d} g_i^d \cdot \frac{\partial \tau_i^d}{\partial t_a}(t),$$

de donde, retomando las condiciones de primer orden que satisface el óptimo t^* en (18), se deducen las condiciones de equilibrio de la red de transporte:

$$s_a^{-1}(t_a^*) = \sum_{d \in D} v_a^d(t^*) := \widetilde{w}_a(t^*) \quad \Rightarrow \quad s_a(\widetilde{w}_a(t^*)) = t_a^*$$

El término $\widetilde{w}_a(t^*)$ representa al flujo total que circula por el arco a para vector de tiempos en arcos t^* .

Cabe señalar que una de las virtudes de este modelo, es que el problema de optimización, aparte de no tener restricciones, busca el óptimo en un espacio de dimensión igual a la cantidad de arcos, lo cual lo hace mucho más eficiente que los modelos con enumeración de rutas.

También es necesario recalcar que, considerando un grafo representativo de la red de transporte, el modelo funciona sólo para resolver el problema de asignación del transporte privado, dado que el transporte público no cuenta con la libertad de tomar elecciones de arcos en cada nodo. Sin embargo, se pueden considerar subgrafos paralelos representando los múltiples modos y unir cada par origen destino (i, d) a cada subgrafo para representar la elección modal. También se pueden incluir arcos de transferencia entre los subgrafos para modelar transbordos entre distintos modos de transporte. Esto significa que este modelo puede simultáneamente resolver los problemas de partición modal y asignación, con limitaciones relacionadas con los tiempos de espera en paraderos en la asignación del transporte público.

De cualquier modo, este modelo necesita como entrada la información de la cantidad de viajes que se hacen entre cada par origen-destino. Es decir, necesita las salidas del problema de distribución.

2.3. Interacción Transporte-Uso de Suelo (ST&US)

En la literatura hay varias formas en que se ha atacado la interacción ST&US. Se han desarrollado modelos de Interacción Espacial, de Programación Matemática, de Utilidad Aleatoria y de “Bid-Rent”, según Chang (2005). Estos modelos encuentran el equilibrio de localización tomando en cuenta la importancia de la incidencia del transporte en el uso de suelo, considerando los costos generalizados del transporte como información conocida. Esta información puede encontrarse bajo métodos de asignación de flujos a la red, suponiendo conocida la localización de actividades. Sin embargo, de este modo no se resuelve un solo problema que encuentre el equilibrio de transporte y uso de suelo simultáneamente, sino que se encuentra el equilibrio global a través de cálculos iterativos de equilibrios parciales de la localización por un lado, y del sistema de transporte por otro. Estos son los llamados modelos bi-nivel.

Un modelo tipo bi-nivel es el propuesto por Boyce y Mattsson (1999) de Programación Matemática, en el cual el equilibrio de la red de transporte y de localización se obtiene a través de dos problemas de optimización. En el primero, se conoce la proporción de trabajadores empleados y la proporción de demanda inmobiliaria en cada zona. Para encontrar la probabilidad de que un trabajador empleado en una zona se localice en otra y la asignación de sus viajes a la red de transporte, se resuelve un problema de optimización con restricciones, cuyo óptimo satisface un logit multinomial en la localización y las condiciones de Wardrop (Sheffi, 1985) en la red de transporte. Del óptimo de este problema se puede conocer la información necesaria para encontrar la

proporción de demanda inmobiliaria en cada zona, a través del segundo problema de optimización, en el cual se maximiza el excedente de los consumidores y productores de oferta inmobiliaria, conocidos los costos de transporte. No se deriva ninguna condición de equilibrio del segundo problema. Chang y Mackett (2005) desarrollan otro modelo bi-nivel con un submodelo tipo “bid-rent” en el equilibrio de localización. La disposición a pagar de los tomadores de decisiones depende de la accesibilidad del lugar, la cual se determina con el equilibrio de un subproblema asociado al sistema de transporte. Éste corresponde a una inecuación variacional cuyo objetivo es minimizar la impedancia del transporte, que corresponde a la diferencia entre los costos de transporte y el atractivo de la localización.

El problema principal de los modelos bi-nivel, aparte del elevado costo computacional de resolver iterativamente varios subequilibrios, es que por lo general no se puede asegurar existencia y unicidad de la solución, por lo que al aplicar alguna heurística para encontrarla, no es seguro que se llegue al equilibrio.

Bajo una óptica distinta, Nagurney y Dong (2002b) desarrollan un modelo que encuentra el equilibrio global a través de una inecuación variacional definida sobre una extensión del grafo del sistema de transporte, que permite incluir las decisiones de localización. Se asegura la existencia y unicidad de la solución bajo ciertas condiciones. Los autores modelan el equilibrio en el mercado de uso de suelo, asumiendo que las funciones de costos generalizados asociados a los arcos de localización, dependen del flujo que pase por el arco, representando una especie de congestión en la localización, lo cual se manifiesta en el equilibrio a través de condiciones de Wardrop con tales costos generalizados. Una limitación del modelo está asociada a asumir funciones de costo generalizado en los arcos de localización exógenas y sin sustento económico claro (con características más propias de la redes de transporte que del mercado de uso de suelo), considerando además que éstas se deberían interpretar como las rentas asociadas al nodo destino de tales arcos.

En resumen, podemos afirmar que la integración de los sistemas ST&US aún es un tema abierto. Pese al desarrollo de heurísticas en las que la interacción entre ambos sistemas es relevante, no se ha desarrollado un modelo que pueda asegurar la convergencia al equilibrio global ST&US ni asegurar la existencia y unicidad del mismo.

3. Modelo de asignación de viajes con localización de actividades

En “Markovian Traffic Equilibrium” (MTE) de Baillon y Cominetti (2004), se presenta un modelo de asignación de flujos en una red de transporte conocida la distribución de los viajes entre todos los pares origen-destino. Los autores buscan el equilibrio a través de la minimización de una función objetivo definida sobre la red de transporte.

En este capítulo se incluyen las decisiones de localización de los agentes en el modelo MTE de Baillon y Cominetti (2004), considerando una red más compleja que incorpora arcos y nodos ficticios de localización con el fin de representar este nuevo nivel de decisión. Se suponen conocidas funciones de costos sobre los nuevos arcos, las cuales interpretan las decisiones de localización y dependen del flujo total de hogares por el arco. Estas funciones son las que definen la renta en cada zona. En base a esto, la función objetivo es modificada para reproducir las condiciones de equilibrio de localización y transporte a través de las condiciones de primer orden que satisface el óptimo, cuya unicidad es garantizada en la Proposición 1.

De manera similar, Nagurney y Dong (2002b) extienden la red de transporte para permitir las decisiones de localización considerando funciones de costo generalizado conocidas en los arcos de localización dependientes del flujo que circula por el arco. El equilibrio se encuentra a través de una inecuación variacional, que garantiza las ecuaciones de Wardrop tanto en la localización como en el sistema de transporte, lo cual surge como una extensión del enfoque determinístico de asignación. A diferencia de estos autores, en este capítulo se hace una extensión de la asignación estocástica propuesta en MTE para incluir las elecciones de localización, dentro del mismo contexto estocástico.

Como simplificación inicial, se supone primero que existe un sólo tipo de hogar que busca localizarse. Una vez encontrado el problema de optimización correspondiente, se hace la extensión a varios tipos de hogar.

3.1. Extensión a localización de un tipo de hogar

En esta parte, se considerará que existe un único tipo de hogar h_0 , y existe una cantidad H_{h_0} de hogares que buscan localizarse.

En MTE, la función $\tau_i^d(\cdot)$ representa el tiempo mínimo esperado en alcanzar el destino d desde i , y se obtiene como sigue:

$$\tau_i^d(t) = \varphi_i^d(t_a + \tau_{j_a}^d(t); a \in A_i^+)$$

Esta función está bien definida si $\varphi_i^d \in \mathcal{E} \quad \forall d, i$ y $\varphi_i^d(t^0) > 0 \quad \forall i \neq d$ para $t_a^0 = s_a(0)$. Estas condiciones forman parte de las hipótesis en Baillon y Cominetti (2004) que antes denotamos (A_0) .

La función objetivo modificada que se considera es:

$$\min_{t \in \mathbb{R}^{|A|+|\tilde{A}|}} \Phi_1(t) := \sum_{a \in A} \int_0^{t_a} s_a^{-1}(z) dz + \sum_{a_0 \in \tilde{A}} \int_0^{t_{a_0}} s_{a_0}^{-1}(z) dz - H_{h_0} \tau_{h_0}(t) \quad (19)$$

donde

$$\tau_{h_0}(t) := \varphi_{h_0}(t_{a_0} + \underbrace{\sum_{d \in D} N_{h_0}^d \tau_{j_{a_0}}^d(t)}_{z_{a_0}}); \quad a_0 \in A_{h_0}^+$$

En esta extensión, t_{a_0} representa el costo por localizarse eligiendo el arco a_0 . La cantidad de viajes generados por cada hogar de tipo h_0 hacia cada propósito p está dada por las constantes $N_{h_0}^p$. Debido a esto, el término $\sum_{d \in D} N_{h_0}^d \tau_{j_{a_0}}^d(t)$ corresponde al costo de transporte por localizarse en j_{a_0} , que considera el tiempo mínimo esperado de todos los viajes generados por los hogares tipo h_0 hacia los distintos destinos. De este modo, dentro de todos los arcos que dispone un hogar tipo h_0 para localizarse, elegirá aquel arco a_0 que tenga el mínimo costo esperado, considerando tanto el costo por elegir el arco a_0 para localizarse, como el costo de transporte por realizar todos sus viajes. Gráficamente (ver Figura 2) la decisión de localización es representada a través de flujos de hogares desde nodos externos a la red de transporte, representando la demanda inmobiliaria, hacia nodos pertenecientes a esta red, a través de los arcos de localización. En estos nodos cada tipo de hogar genera una determinada cantidad de viajes hacia los distintos destinos, lo cual modifica el nivel de servicio de la red de transporte. Éste, a su vez, influye fuertemente en la elección de localización, representándose así la interacción ST&US.

Por otra parte, $\varphi_{h_0}(\cdot)$ es una función de la clase \mathcal{E} , definida anteriormente, de modo tal que $\frac{\partial \varphi_{h_0}}{\partial z_{a_0}}$ corresponde a la probabilidad de que un hogar tipo h_0 elija el arco a_0 , o lo que es lo mismo, la probabilidad de que se localice en j_{a_0} ($P_{j_{a_0}/h_0}$).

Para que el problema de optimización tenga solución única, se necesita que la función $\Phi_1 : \mathbb{R}^{|A|+|\tilde{A}|} \rightarrow \mathbb{R}$ sea estrictamente convexa y coerciva, para lo cual se supondrá lo siguiente:

$$(A_1) = \begin{cases} \text{se cuenta con familias } \varphi_{h_0}, \varphi_i^d \in \mathcal{E} \text{ con } \varphi_a^d = 0 \text{ y las funciones de tiempos} \\ \text{de viaje } s_a : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ con } a \in A \cup \tilde{A}, \text{ deben ser estrictamente} \\ \text{crecientes y } \lim_{w_a \rightarrow \infty} s_a(w_a) = \infty, t_a^0 = s_a(0) \geq 0 \text{ y } \varphi_i^d(t^0) > 0 \text{ para todo } i \neq d \end{cases}$$

Al igual que en MTE, s_a se extiende a \mathbb{R}_- tomando $s_a(w_a) = s_a(0) + w_a$ para $w_a < 0$. La existencia y unicidad del óptimo se demuestra en la Proposición 1.

Bajo estos supuestos, la solución es caracterizada por las condiciones de primer orden (CPO), las que son resultado de imponer $\nabla \Phi_1 = 0$. Es decir,

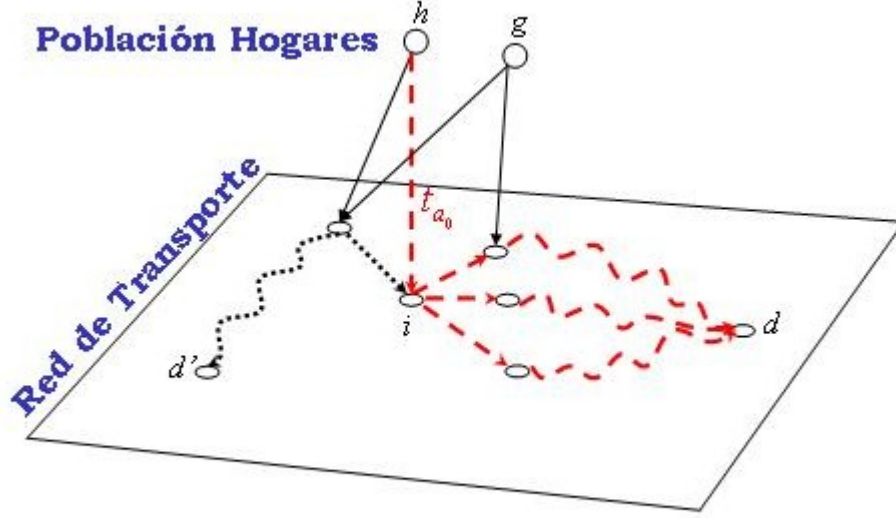


Figura 2: Hiperruta

$$\forall a \in A \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial t_a}(t) = s_a^{-1}(t_a) - H_{h_0} \frac{\partial \tau_{h_0}}{\partial t_a}(t)$$

$$\frac{\partial \tau_{h_0}}{\partial t_a}(t) = \sum_{a_0 \in A_{h_0}^+} \frac{\partial \varphi_{h_0}}{\partial z_{a_0}}(z(t)) \cdot \frac{\partial z_{a_0}}{\partial t_a}(t) = \sum_{a_0 \in A_{h_0}^+} \frac{\partial \varphi_{h_0}}{\partial z_{a_0}}(z(t)) \cdot \sum_{d \in D} N_{h_0}^d \cdot \frac{\partial \tau_{j_{a_0}}^d}{\partial t_a}(t)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial t_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad s_a^{-1}(t_a) = \sum_{d \in D} \sum_{a_0 \in A_{h_0}^+} H_{h_0} \cdot \underbrace{\frac{\partial \varphi_{h_0}}{\partial z_{a_0}}(z(t)) \cdot N_{h_0}^d}_{P_{j_{a_0}/h_0}} \cdot \frac{\partial \tau_{j_{a_0}}^d}{\partial t_a}(t) \quad (20)$$

Definiendo $H_{h_0 j_{a_0}} := H_{h_0} \cdot P_{j_{a_0}/h_0}$, que corresponde a la cantidad de hogares tipo h_0 que eligen localizarse en j_{a_0} y $g_{j_{a_0}}^d := H_{h_0 j_{a_0}} \cdot N_{h_0}^d$, que corresponde al total de viajes generados con destino d (recordando que sólo hay un tipo de hogar), de (20) se obtiene:

$$s_a^{-1}(t_a) = \sum_{d \in D} \left(\sum_{a_0 \in A_{h_0}^+} g_{j_{a_0}}^d \cdot \frac{\partial \tau_{j_{a_0}}^d}{\partial t_a}(t) \right) = \sum_{d \in D} \langle g^d, \frac{\partial \tau^d}{\partial t_a}(t) \rangle$$

Al igual que en MTE, se cumple:

$$v_a^d = \langle g^d, \frac{\partial \tau^d}{\partial t_a}(t) \rangle$$

donde v_a^d corresponde al flujo de viajes con destino d que pasa por el arco a .

De este modo se llega a $s_a^{-1}(t_a) = \sum_{d \in D} v_a^d := w_a$, de donde se concluye la condición de equilibrio de la red de transporte, $t_a = s_a(w_a)$.

Por otro lado, en los arcos de localización:

$$\forall a_0 \in \tilde{A} \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial t_{a_0}}(t) = s_{a_0}^{-1}(t_{a_0}) - H_{h_0} \frac{\partial \tau_{h_0}}{\partial t_{a_0}}(t)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{h_0}}{\partial t_{a_0}}(t) &= \sum_{a \in A_{h_0}^+} \frac{\partial \varphi_{h_0}}{\partial z_a}(z(t)) \cdot \frac{\partial z_a}{\partial t_{a_0}}(t) = \sum_{a \in A_{h_0}^+} \frac{\partial \varphi_{h_0}}{\partial z_a}(z(t)) \cdot (\delta_{aa_0} + \sum_{d \in D} N_{h_0}^d \cdot \frac{\partial \tau_{ja}^d}{\partial t_{a_0}}(t)) \\ &= \frac{\partial \varphi_{h_0}}{\partial z_{a_0}}(z(t)) + \sum_{d \in D} \sum_{a \in A_{h_0}^+} \frac{\partial \varphi_{h_0}}{\partial z_a}(z(t)) \cdot N_{h_0}^d \cdot \frac{\partial \tau_{ja}^d}{\partial t_{a_0}}(t) \end{aligned}$$

Pero $\forall a \in A_{h_0}^+$, $\frac{\partial \tau_{ja}^d}{\partial t_{a_0}}(t) = 0$, por lo que queda $\frac{\partial \tau_{h_0}}{\partial t_{a_0}}(t) = \frac{\partial \varphi_{h_0}}{\partial z_{a_0}}(z(t))$.

$$\therefore \frac{\partial \Phi_1}{\partial t_{a_0}} = 0 \quad \Rightarrow \quad s_{a_0}^{-1}(t_{a_0}) = \underbrace{H_{h_0} \cdot \frac{\partial \varphi_{h_0}}{\partial z_{a_0}}(z(t))}_{w_{a_0}}$$

donde w_{a_0} es el flujo de hogares total por el arco a_0 . De aquí se concluye $t_{a_0} = s_{a_0}(w_{a_0})$.

De este modo, bajo las hipótesis (A_1) , la única solución del problema de minimización $t^* \in \mathbb{R}^{|A|+|\tilde{A}|}$, satisface en cada componente ser función del flujo sobre el arco respectivo, representándose de esta forma la congestión, ya sea de hogares, en el caso de los arcos de localización, o de viajes, en el caso de arcos de la red de transporte. Esto corresponde a la condición de equilibrio global del sistema ST&US, en el caso de conocer las funciones de costos en los arcos de localización.

3.2. Extensión a varios tipos de hogar

En esta extensión, se permitirá la localización de varios tipos de hogar, para lo cual se considera un conjunto H que agrupa los nodos representantes de cada tipo. De este modo, en este modelo se cumple:

$$\tilde{A} = \bigcup_{h_0 \in H} A_{h_0}^+$$

El problema que se considera en esta extensión es:

$$\Phi_2(t) = \sum_{a \in A} \int_0^{t_a} s_a^{-1}(z) dz + \sum_{a_0 \in \tilde{A}} \int_0^{t_{a_0}} s_{a_0}^{-1}(z) dz - \sum_{h_0 \in H} H_{h_0} \tau_{h_0}(t), \quad (21)$$

Este problema, bajo las hipótesis (A_1) , mantiene las condiciones de convexidad estricta y coercividad, lo cual se demuestra en la Proposición 1.

Proposición 1. *Bajo (A_1) , el problema (21) posee una única solución.*

Demostración Se demostrará que Φ_2 es estrictamente convexa y coerciva. La función φ_{h_0} es cóncava y creciente por componentes al igual que φ_i^d , lo que implica que $\tau_{h_0}(t)$ es cóncava. De (A_1) se sabe que $\forall a \in A \cup \tilde{A}$ la función $s_a(\cdot)$ es estrictamente creciente, de donde se concluye que Φ_2 es estrictamente convexa.

Para demostrar la coercividad de Φ_2 , es necesario probar que la función de recesión $\Phi_2^\infty(t) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\Phi_2(\lambda t)}{\lambda} > 0 \quad \forall t \neq 0$. Se tiene que:

$$\Phi_2^\infty(t) = \varphi^\infty(t) - \sum_{h_0 \in H} H_{h_0} \tau_{h_0}^\infty(t)$$

donde $\varphi(t) = \sum_{a \in A \cup \tilde{A}} \int_0^{t_a} s_a^{-1}(z) dz$. Debido a (A_1) se cumple:

$$\varphi^\infty(t) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{a \in A \cup \tilde{A}} s_a^{-1}(\lambda t_a) \cdot t_a = +\infty.$$

Además, de Baillon y Cominetti (2004), se tiene que:

$$\tau_{h_0}^\infty(t) = \varphi_{h_0}^\infty(t_{a_0} + \sum_{d \in D} N_{h_0}^d (\bar{\tau}_{j_{a_0}}^d)^\infty(t); a_0 \in A_{h_0}^+) = \min_{a_0 \in A_{h_0}^+} (t_{a_0} + \sum_{d \in D} N_{h_0}^d \bar{\tau}_{j_{a_0}}^d(t)) < +\infty$$

donde $\bar{\tau}_i^d(t)$ corresponde a la ruta mínima determinística entre i y d . De este modo, $\Phi_2^\infty(t) = +\infty > 0$ lo que implica la coercividad de Φ_2 . ■

En este caso, las CPO del óptimo del problema (21) conducen a:

$$\begin{aligned} \forall a \in A \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial t_a}(t) &= s_a^{-1}(t_a) - \sum_{h_0 \in H} H_{h_0} \frac{\partial \tau_{h_0}}{\partial t_a}(t) \\ \frac{\partial \tau_{h_0}}{\partial t_a}(t) &= \sum_{a_0 \in A_{h_0}^+} \frac{\partial \varphi_{h_0}}{\partial z_{a_0}}(z(t)) \cdot \frac{\partial z_{a_0}}{\partial t_a}(t) = \sum_{a_0 \in A_{h_0}^+} \frac{\partial \varphi_{h_0}}{\partial z_{a_0}}(z(t)) \cdot \sum_{d \in D} N_{h_0}^d \cdot \frac{\partial \tau_{j_{a_0}}^d}{\partial t_a}(t) \\ \therefore \frac{\partial \Phi_2}{\partial t_a} = 0 &\Leftrightarrow s_a^{-1}(t_a) = \sum_{h_0 \in H} \sum_{d \in D} \sum_{a_0 \in A_{h_0}^+} \underbrace{H_{h_0} \cdot \frac{\partial \varphi_{h_0}}{\partial z_{a_0}}(z(t))}_{H_{h_0 j_{a_0}}} \cdot N_{h_0}^d \cdot \frac{\partial \tau_{j_{a_0}}^d}{\partial t_a}(t) \end{aligned}$$

$$= \sum_{d \in D} \sum_{a_0 \in \tilde{A}} \left(\sum_{h \in Q_{j_{a_0}}^-} H_{hj_{a_0}} \cdot N_h^d \right) \cdot \frac{\partial \tau_{j_{a_0}}^d}{\partial t_a}(t) \quad (22)$$

donde $Q_{j_{a_0}}^-$ corresponde en este caso al conjunto de tipos de hogar que tienen a j_{a_0} como alternativa para localizarse (un caso particular es $Q_j^- = H$). Así, definiendo:

$$g_{j_{a_0}}^d := \sum_{h \in Q_{j_{a_0}}^-} H_{hj_{a_0}} \cdot N_h^d,$$

que corresponde al total de viajes con destino d que son generados en j_{a_0} , de (22) se obtiene:

$$s_a^{-1}(t_a) = \sum_{d \in D} \left(\sum_{a_0 \in \tilde{A}} g_{j_{a_0}}^d \cdot \frac{\partial \tau_{j_{a_0}}^d}{\partial t_a}(t) \right) = \sum_{d \in D} \langle g^d, \frac{\partial \tau^d}{\partial t_a}(t) \rangle$$

Al igual que antes, se define $v_a^d := \langle g^d, \frac{\partial \tau^d}{\partial t_a}(t) \rangle$ por lo que se obtiene:

$$s_a^{-1}(t_a) = \sum_{d \in D} v_a^d := w_a,$$

de donde se concluye que $t_a = s_a(w_a)$.

Por otro lado,

$$\forall a_0 \in \tilde{A} \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial t_{a_0}}(t) = s_{a_0}^{-1}(t_{a_0}) - \sum_{h_0 \in H} H_{h_0} \frac{\partial \tau_{h_0}}{\partial t_{a_0}}(t)$$

Si $a_0 \in A_{h_0}^+$, al igual que antes, se obtiene $\frac{\partial \tau_{h_0}}{\partial t_{a_0}}(t) = \frac{\partial \varphi_{h_0}}{\partial z_{a_0}}(z(t))$, pero si $a_0 \notin A_{h_0}^+$ se obtiene $\frac{\partial \tau_{h_0}}{\partial t_{a_0}}(t) = 0$. De este modo, se satisface:

$$\frac{\partial \tau_{h_0}}{\partial t_{a_0}}(t) = \begin{cases} \frac{\partial \varphi_{h_0}}{\partial z_{a_0}}(z(t)) & \text{si } a_0 \in A_{h_0}^+ \\ 0 & \text{si } a_0 \notin A_{h_0}^+ \end{cases}$$

$$\therefore \frac{\partial \Phi_2}{\partial t_{a_0}} = 0 \quad \Rightarrow \quad s_{a_0}^{-1}(t_{a_0}) = H_{i_{a_0}} \cdot \underbrace{\frac{\partial \varphi_{i_{a_0}}}{\partial z_{a_0}}(z(t))}_{P_{j_{a_0}/i_{a_0}}} =: w_{a_0},$$

que corresponde al flujo por el arco $a_0 \in \tilde{A}$.

De este modo se concluye $t_{a_0} = s_{a_0}(w_{a_0})$, manteniéndose las condiciones de equilibrio global de ST&US.

Una debilidad importante de este modelo es que la renta se fija en los arcos de localización, en cada uno de los cuales sólo circula un tipo de hogar, lo cual no permite la interacción entre los distintos agentes demandantes en la obtención de la renta y por lo tanto no queda representada la competencia en el mercado del suelo. Por esta razón, se modificará el modelo para hacer más consistente la representación de las decisiones en la localización, incluyendo el equilibrio en el mercado del uso de suelo propuesto en RB&SM.

4. Inclusión del mercado de remates en la localización

En esta modificación al modelo, se levantará la hipótesis de conocer una función definida en los arcos de localización representando la renta, para incluir el mercado de remate en las decisiones de localización, lo cual corresponde a la parte troncal y principal contribución de este trabajo. El mercado de remates se introducirá a través de las condiciones de equilibrio de uso de suelo presentes en RB&SM. Además se pedirá que se satisfagan simultáneamente las condiciones de equilibrio del sistema de transporte presentes en MTE, para caracterizar, de este modo, al equilibrio del sistema integrado de uso de suelo y transporte ST&US. Analíticamente estas condiciones son:

$$\sum_{h \in H} H_{hi} = H_h \quad (23)$$

$$\sum_{i \in I} H_{hi} = S_i \quad (24)$$

$$s_a(w_a) = t_a \quad (25)$$

donde (23) y (24) corresponden a las condiciones de equilibrio en la localización presentes en RB&SM, en el caso de oferta inmobiliaria fija, y (25) corresponde a la condición de equilibrio en el sistema de transportes, presente en MTE.

En este enfoque, cumple un rol importante la función de *disposición a pagar* (DP), la cual determina el comportamiento de los agentes en las decisiones de localización (Alonso, 1965). Esta función, que denotaremos $B_h^i(\cdot)$, representa cuánto está dispuesto a pagar un hogar tipo h por una localización en la zona i .

Si suponemos que no existen externalidades, o bien que éstas no participan del equilibrio, y que los costos de transporte son contantes, se puede asumir que las percepciones de los atributos de la zona z_{hi} también son constantes. Si además suponemos que la disposición a pagar es de la forma $B_h^i = z_{hi} - b_h$, se ha demostrado que las condiciones de equilibrio en la localización del modelo RB&SM son reproducidas por el óptimo del problema de maximización de la entropía doblemente acotado (P):

$$(P) \quad \underset{H_{hi}}{\text{mín}} - \sum_{\substack{i \in I \\ h \in H}} H_{hi} z_{hi} + \frac{1}{\mu} \sum_{\substack{i \in I \\ h \in H}} H_{hi} (\ln(H_{hi}) - 1)$$

s.a.

$$\sum_{i \in I} H_{hi} = H_h \quad (26)$$

$$\sum_{h \in H} H_{hi} = S_i \quad (27)$$

$$H_{hi} \geq 0 \quad (28)$$

Si se cumple $\sum_{h \in H} H_h = \sum_{i \in I} S_i$, este problema tiene un único mínimo, dada la estricta convexidad de la función objetivo y la compacidad del conjunto factible. En caso contrario, el problema es infactible.

La inclusión del mercado de remates en el modelo, es motivada por el problema dual de (P), el cual reproduce las mismas condiciones de equilibrio en la localización y corresponde a:

$$(D) \quad \min_{b,r} \sum_{i \in I} S_i r_i + \sum_{h \in H} H_h b_h + \frac{1}{\mu} \sum_{\substack{i \in I \\ h \in H}} \exp(\mu(z_{hi} - b_h - r_i))$$

donde las variables b_h y r_i corresponden a los multiplicadores de Lagrange de las restricciones (26) y (27), respectivamente. La variable b_h representa el nivel de utilidad que alcanza un hogar tipo h en el equilibrio y r_i representa la renta en la zona i .

Cabe señalar que, debido a la equivalencia de los modelos de maximización de la entropía y logit multinomial (Anas, 1981), las condiciones de primer orden que satisface el óptimo de los problemas (P) y (D):

$$H_{hi} = S_i \cdot P_{h/i}$$

donde

$$P_{h/i} = \frac{\exp(\mu B_h^i)}{\sum_{g \in H} \exp(\mu B_g^i)},$$

corresponden al modelo logit multinomial, cuando se supone que la disposición a pagar es una variable aleatoria del tipo $\tilde{B}_h^i = B_h^i + \epsilon_h^i$, donde los errores ϵ_h^i distribuyen iid Gumbel de parámetro de escala μ . De este modo, μ es inversamente proporcional a la varianza del error asociado a las disposiciones a pagar.

Para incluir el equilibrio en la red de transporte, es necesario dejar de suponer constante la percepción de los atributos de la zona, y considerar la influencia del transporte dentro de estos atributos. Para esto se propone, inspirándose en la función $\tau_h(t)$ ocupada en el modelo (21), considerar el siguiente vector de atributos:

$$Z_{hi}(t) \triangleq z_{hi} - \sum_{d \in D} N_h^d \tau_i^d(t)$$

donde el primer término se asume constante y captura percepciones del tipo de hogar h , frente a atributos particulares de la zona i , sin considerar la influencia del transporte. El segundo término corresponde al costo de transporte, al igual que en (21), manteniéndose la definición de las funciones $\tau_i^d(t)$. De este modo, se considerará la siguiente función de disposición a pagar:

$$B_h^i(b_h, t) = Z_{hi}(t) - b_h$$

donde el término b_h corresponde al nivel de utilidad alcanzado por un hogar tipo h , el cual, en el equilibrio, debe ser igual para todos los hogares de un mismo tipo.

Para obtener el equilibrio del sistema de transporte, también es necesario agregar un término extra en la función objetivo, que contemple la información de la saturación de los arcos. Para ello se utilizó como base el problema (17), obteniéndose finalmente el siguiente problema de optimización:

$$\min_{t,b,r} \Phi_3(t, b, r) := \sum_{a \in A} \int_0^{t_a} s_a^{-1}(z) dz + \sum_{i \in I} S_i r_i + \sum_{h \in H} H_h b_h + \frac{1}{\mu} \sum_{\substack{h \in H \\ i \in I}} e^{\mu(B_h^i(b_h, t) - r_i)} \quad (29)$$

En este modelo, la función Φ_3 tiene un dominio de mayor dimensión que la del modelo en el capítulo anterior:

$$\Phi_3 : \mathbb{R}^{|A|+|I|+|H|} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Se continuará suponiendo que $\sum_{h \in H} H_h = \sum_{i \in I} S_i$. De este modo, es necesario notar que si (t, b, r) es un vector óptimo del problema (29), también lo es $(t, b+c, r-c) \quad \forall c \in \mathbb{R}$. En efecto,

$$\Phi_3(t, b+c, r-c) - \Phi_3(t, b, r) = -c \cdot \sum_{i \in I} S_i + c \cdot \sum_{h \in H} H_h = 0$$

Luego, para poder aspirar a unicidad en la solución, supondremos además que $b_1 = 0$, para así reducir el dominio en una dimensión.

Bajo estos supuestos, el problema de optimización (29) tiene un único óptimo, dado que la función Φ_3 es estrictamente convexa y coerciva. Esto se demuestra en la Proposición 2.

Proposición 2. *Bajo (A_0) , $\sum_{h \in H} H_h = \sum_{i \in I} S_i$ y $b_1 = 0$, el problema (29) posee una única solución.*

Demostración Basta ver que $\Phi_3(t, b, r)$ es estrictamente convexa y coerciva. Se sabe bajo los supuestos (A_0) en Baillon y Cominetti (2004), que las funciones $\tau_i^d(t)$ son cóncavas, luego $B_h^i(b_h, t)$ es una función convexa. Como $f(x) = \exp(\mu \cdot x)$ es creciente y estrictamente convexa, se tiene que la función $\Theta(t, b, r) = \frac{1}{\mu} \sum_{h,i} \exp(\mu(B_h^i(b_h, t) - r_i))$ es convexa con respecto a t y estrictamente convexa con respecto a b y r . Dado el supuesto de que las funciones $s_a(\cdot)$ son estrictamente crecientes, el término $\varphi(t) = \sum_{a \in A} \int_0^{t_a} s_a^{-1}(z) dz$ es una función estrictamente convexa, de donde se deduce que Φ_3 es estrictamente convexa con respecto a t . Como además, $\Theta(t, b, r)$ es estrictamente convexa con respecto a b y r , y $\sum_{h \in H} H_h b_h$ es lineal en b , al igual que $\sum_{i \in I} S_i r_i$ con respecto a r , se concluye que Φ_3 es estrictamente convexa en (t, b, r) .

Para la coercividad, basta probar que:

$$\Phi_3^\infty(t, b, r) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\Phi_3(\lambda t, \lambda b, \lambda r)}{\lambda} > 0 \quad \forall (t, b, r) \neq 0$$

donde Φ_3^∞ es la función de recesión de Φ_3 .

Sea $(t, b, r) \neq 0$ cualquiera.

- 1.- Supongamos que $t \neq 0$, como las funciones $s_a(\cdot)$ cumplen que $\lim_{w_a \rightarrow \infty} s_a(w_a) = \infty$, bajo el supuesto (A_0) de Baillon y Cominetti (2004), se tiene que $\varphi^\infty(t) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{a \in A} s_a^{-1}(\lambda t_a) t_a = +\infty$. Además el término $\frac{1}{\mu} \sum_{h,i} \exp(\mu(B_h^i(b_h, t) - r_i)) > 0$, por lo cual $\Phi_3^\infty(t, b, r) > \varphi^\infty(t) + \sum_h H_h b_h + \sum_i S_i r_i = +\infty > 0$ lo que implica que Φ_3 es coerciva.
- 2.- Supongamos ahora que $t = 0$. De Baillon y Cominetti (2004) se sabe que $(\tau_i^d)^\infty(t) = \bar{\tau}_i^d(t)$, que corresponde al costo de la ruta mínima determinística entre i y d cuando el costo de cada arco a es t_a . De este modo,

$$Z_{hi}^\infty(t) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{z_{hi}}{\lambda} - \sum_{d \in D} N_h^d \frac{\tau_i^d(\lambda t)}{\lambda} = - \sum_{d \in D} N_h^d \bar{\tau}_i^d(t)$$

En el caso en que $t = 0$, $Z_{hi}^\infty(0) = 0$. Luego, Φ_3^∞ se reduce a:

$$\begin{aligned} \Phi_3^\infty(0, b, r) &= \sum_h H_h b_h + \sum_i S_i r_i + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda \mu} \sum_{h,i} \exp(\lambda \mu (Z_{hi}^\infty(0) - b_h - r_i)) \\ &= \sum_h H_h b_h + \sum_i S_i r_i + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda \mu} \sum_{h,i} \exp(-\lambda \mu (b_h + r_i)) \end{aligned}$$

2.1.- Si $\exists h_0, i_0$ tal que $b_{h_0} + r_{i_0} < 0$, entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda \mu} \sum_{h,i} e^{-\lambda \mu (b_h + r_i)} &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda \mu} (e^{\lambda \mu (-(b_{h_0} + r_{i_0}))}) + \sum_{\substack{h \neq h_0 \\ i \neq i_0}} e^{-\lambda \mu (b_h + r_i)}) \\ &> \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda \mu} e^{\lambda \mu (-(b_{h_0} + r_{i_0}))} = +\infty \end{aligned}$$

de donde se concluye $\Phi_3^\infty(0, b, r) > 0$.

2.2.- Si por el contrario, $\forall h, i$ se tiene $b_h + r_i \geq 0$, entonces $b_h \geq -r_i \quad \forall h, i$, de donde se deduce que $\min_h b_h \geq -\min_i r_i$.

- Si $\forall h, b_h = \min_h b_h$ y $\forall i, r_i = \min_i r_i$, entonces se debe cumplir que $\min_h b_h > -\min_i r_i$, ya que en caso contrario, si $\min_h b_h = -\min_i r_i$, entonces $b_h = \min_h b_h = -\min_i r_i = -r_i \quad \forall h, i$ y como suponemos que $b_1 = 0$, implica que $b_h = r_i = 0 \quad \forall h, i$, lo cual no puede ser, ya que se tomó un vector $(t, b, r) \neq 0$. De este modo, en este caso:

$$\begin{aligned} \Phi_3^\infty(0, b, r) &\geq \sum_h H_h b_h + \sum_i S_i r_i = \min_h b_h \sum_h H_h + \min_i r_i \sum_i S_i \\ &> -\min_i r_i \sum_h H_h + \min_i r_i \sum_i S_i = 0 \end{aligned}$$

- En el caso en que $\exists h_0 \in H$ tq $b_{h_0} > \min_h b_h$ o $\exists i_0 \in I$ tq $r_{i_0} > \min_i r_i$, se tiene:

$$\begin{aligned} \Phi_3^\infty(0, b, r) &\geq \sum_h H_h b_h + \sum_i S_i r_i > \min_h b_h \sum_h H_h + \min_i r_i \sum_i S_i \\ &\geq -\min_i r_i \sum_h H_h + \min_i r_i \sum_i S_i = 0 \end{aligned}$$

De cualquier modo se obtiene $\Phi_3^\infty(0, b, r) > 0$, lo que concluye el resultado. \blacksquare

Las condiciones de primer orden caracterizan al equilibrio, tanto en el mercado de remate en la localización, como en el equilibrio de tráfico markoviano (MTE) en el sistema de transporte. Esto se desarrolla a continuación:

$$\forall h \in H \quad \frac{\partial \Phi_3}{\partial b_h}(t, b, r) = H_h + \frac{1}{\mu} \sum_{i \in I} \exp(\mu(B_h^i(b_h, t) - r_i)) \cdot (-\mu)$$

Luego,

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial b_h}(t, b, r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad H_h = \sum_{i \in I} \exp(\mu(B_h^i(b_h, t) - r_i)) \quad (30)$$

Definiendo:

$$H_{hi} := \exp(\mu(B_h^i(b_h, t) - r_i)) \quad (31)$$

que corresponde al total de familias tipo h que se localizan en la zona i , se obtiene la primera condición de equilibrio en la localización (23):

$$H_h = \sum_{i \in I} H_{hi} \quad \forall h \in H$$

De lo anterior se obtiene, al reemplazar $B_h^i(b_h, t)$ en (30),

$$H_h = \exp(-\mu b_h) \sum_{i \in I} \exp(\mu(Z_{hi}(t) - r_i))$$

de donde se obtiene:

$$\exp(-\mu b_h) = \frac{H_h}{\sum_{i \in I} \exp(\mu(Z_{hi}(t) - r_i))} \quad (32)$$

De este modo, al reemplazar (32) en (31),

$$H_{hi} = H_h \cdot \frac{\exp(\mu(Z_{hi}(t) - r_i))}{\sum_{j \in I} \exp(\mu(Z_{hj}(t) - r_j))} = H_h \cdot \frac{\exp(\mu(B_h^i(b_h, t) - r_i))}{\sum_{j \in I} \exp(\mu(B_h^j(b_h, t) - r_j))}$$

de donde se puede definir la siguiente probabilidad:

$$P_{i/h} := \frac{\exp(\mu(B_h^i(b_h, t) - r_i))}{\sum_{j \in I} \exp(\mu(B_h^j(b_h, t) - r_j))}$$

que corresponde a la probabilidad de que un hogar tipo h se localice en una vivienda en la zona i (“choice”).

Además, de (32) se puede deducir para cada $h \in H$:

$$b_h = \frac{1}{\mu} \ln \sum_{i \in I} \exp(\mu(Z_{hi}(t) - r_i)) - \frac{1}{\mu} \ln(H_h),$$

Por otra parte,

$$\forall i \in I, \quad \frac{\partial \Phi_3}{\partial r_i}(t, b, r) = S_i + \frac{1}{\mu} \sum_{h \in H} \exp(\mu(B_h^i(b_h, t) - r_i)) \cdot (-\mu)$$

Luego,

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial r_i}(t, b, r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S_i = \sum_{h \in H} \exp(\mu(B_h^i(b_h, t) - r_i))$$

de donde se deduce la segunda condición de equilibrio en la localización (24), $S_i = \sum_{h \in H} H_{hi}$.

De lo anterior se obtiene:

$$\exp(-\mu r_i) = \frac{S_i}{\sum_{h \in H} \exp(\mu B_h^i(b_h, t))} \quad \forall i \in I \quad (33)$$

de donde se deduce:

$$H_{hi} = S_i \cdot \frac{\exp(\mu B_h^i(b_h, t))}{\sum_{g \in H} \exp(\mu B_g^i(b_g, t))}$$

Considerando la ecuación anterior se puede definir:

$$P_{h/i} := \frac{\exp(\mu B_h^i(b_h, t))}{\sum_{g \in H} \exp(\mu B_g^i(b_g, t))} = \frac{H_{hi}}{S_i}$$

que corresponde a la probabilidad de que el oferente en la zona i le otorgue la vivienda a una familia de tipo h , es decir, que h sea el mejor postor en i (“bid”).

Además de (33) se obtiene para cada $i \in I$:

$$r_i = \frac{1}{\mu} \ln \sum_{h \in H} \exp(\mu B_h^i(b_h, t)) - \frac{1}{\mu} \ln(S_i),$$

o sea la renta se obtiene como la logsuma, la máxima disposición a pagar esperada entre los hogares demandantes. Las condiciones de primer orden hasta aquí reproducen las condiciones de equilibrio del modelo RB&SM.

El equilibrio en la red de transporte se obtiene de las siguientes condiciones de primer orden:

$$\forall a \in A, \quad \frac{\partial \Phi_3}{\partial t_a}(t, b, r) = s_a^{-1}(t_a) + \frac{1}{\mu} \sum_{\substack{h \in H \\ i \in I}} \exp(\mu(B_h^i(b_h, t) - r_i)) \cdot \mu \frac{\partial B_h^i}{\partial t_a}(b_h, t)$$

donde

$$\frac{\partial B_h^i}{\partial t_a}(b_h, t) = - \sum_{d \in D} N_h^d \cdot \frac{\partial \tau_i^d}{\partial t_a}(t)$$

Luego,

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial t_a}(t, b, r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad s_a^{-1}(t_a) = \sum_{\substack{h \in H \\ i \in I}} \underbrace{\exp(\mu(B_h^i(b_h, t) - r_i))}_{H_{hi}} \cdot \sum_{d \in D} N_h^d \cdot \frac{\partial \tau_i^d}{\partial t_a}(t)$$

Esto equivale a escribir:

$$s_a^{-1}(t_a) = \sum_{d \in D} \sum_{i \in I} \left(\sum_{h \in H} H_{hi} N_h^d \right) \frac{\partial \tau_i^d}{\partial t_a}(t)$$

Definiendo $g_i^d := \sum_{h \in H} H_{hi} N_h^d$, que corresponde al total de viajes con destino d que se inician en la zona i , se obtiene:

$$s_a^{-1}(t_a) = \sum_{d \in D} \sum_{i \in I} g_i^d \frac{\partial \tau_i^d}{\partial t_a}(t) = \sum_{d \in D} \langle g^d, \frac{\partial \tau^d}{\partial t_a}(t) \rangle$$

Acá se recupera la demanda en la red de transporte modelada en “Markovian Traffic Equilibrium” de Baillon y Cominetti, en donde se demuestra que el flujo de viajes en el arco a con destino d corresponde a:

$$v_a^d = \langle g^d, \frac{\partial \tau^d}{\partial t_a}(t) \rangle$$

De este modo, con estas condiciones de primer orden, se obtiene para cada arco $a \in A$:

$$s_a^{-1}(t_a) = \sum_{d \in D} v_a^d = w_a$$

donde w_a corresponde al flujo total por el arco a . De aquí se obtiene la condición de equilibrio en los arcos de la red de transporte (25).

De este modo, el único mínimo, bajo las condiciones de la Proposición 1, satisface simultáneamente las condiciones de equilibrio de localización “Bid-Rent” presentes en RB&SM y las condiciones de equilibrio de la red de transporte presentes en MTE, por lo que se obtiene un único equilibrio integrado del sistema ST&US.

Observaciones:

- Se puede modelar el hecho que algún tipo de hogar h no tenga como alternativa cierta localización i (no haya un arco que una esos nodos). Para ello basta considerar la siguiente función objetivo:

$$\min_{t,r,b} \sum_{a \in A} \int_0^{t_a} s_a^{-1}(z) dz + \sum_{i \in I} S_i r_i - \sum_{h \in H} H_h b_h + \frac{1}{\mu} \sum_{h \in H} \sum_{i \in Q_h^+} \exp(\mu(B_h^i(b_h, t) - r_i)) \quad (34)$$

recordando que Q_h^+ es el conjunto de nodos en la red que son alcanzables a través de un arco desde h .

- Además se puede modelar la inmigración de gente, al hacer variable las cantidades de hogares de cada tipo. Para ello, basta conocer funciones de demanda crecientes que dependan del nivel de utilidad alcanzado por los distintos tipos de hogar: $H_h(b_h)$. De ese modo, el problema de optimización se modifica a:

$$\min_{t,r,b} \sum_{a \in A} \int_0^{t_a} s_a^{-1}(z) dz + \sum_{i \in I} S_i r_i + \sum_{h \in H} \int_0^{b_h} H_h(x) dx + \frac{1}{\mu} \sum_{h \in H} \sum_{i \in Q_h^+} e^{\mu(B_h^i(b_h, t) - r_i)} \quad (35)$$

de donde se obtienen las mismas condiciones de primer orden. De hecho, el modelo anterior es un caso particular de éste, en el que se supone que las funciones $H_h(b_h) \equiv H_h$.

El crecimiento de las funciones $H_h(b_h)$ mantiene las condiciones de convexidad de la función objetivo. Para mantener la coercividad de ésta, basta suponer que $\lim_{x \rightarrow \infty} H_h(x) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} H_h(x) = -\infty$, en cuyo caso la coercividad es directa, o suponer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} H_h(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} H_h(x) = \bar{H}_h$, en cuyo caso se necesita suponer además que $\sum_{h \in H} \bar{H}_h = \sum_{i \in I} S_i$. Bajo estos supuestos, el óptimo del problema de optimización (35) sigue siendo único, lo cual se demuestra de forma análoga a la Proposición 2.

- A través del cálculo del dual de (29), se obtiene la caracterización primal del equilibrio global ST&US:

$$\begin{aligned} \min_{H_{\bullet\bullet}, w, v, x, g} & - \sum_{h,i} H_{hi} z_{hi} + \frac{1}{\mu} \sum_{h,i} H_{hi} (\ln H_{hi} - 1) - \sum_{h,i,p,d} g_i^{hpd} \gamma_h^{dp} + \sum_{a \in A} \int_0^{w_a} s_a(x) dx \\ & + \sum_{h,i,p} \Upsilon_1^{hip}(g, H_{\bullet\bullet}) + \sum_{h,p,d} \Upsilon_2^{hpd}(x, v) \end{aligned} \quad (36)$$

s.a

$$\sum_i H_{hi} = H_h \quad \forall h \in H \quad (37)$$

$$\sum_h H_{hi} = S_i \quad \forall i \in I \quad (38)$$

$$x_i^{hpd} = g_i^{hpd} + \sum_{a \in A_i^-} v_a^{hpd} \quad \forall i, h, p, d \quad (39)$$

$$w_a = \sum_{hpd} v_a^{hpd} \quad (40)$$

donde

$$\Upsilon_1^{hip}(g, H_{\bullet\bullet}) = \sup_{\eta_i^{hp\bullet}} [H_{hi} N_h^p \left(-\frac{1}{\mu_{hi}^p} \ln \sum_{d \in Q_p^-} e^{-\mu_{hi}^p \eta_i^{hpd}} \right) - \sum_{d \in Q_p^-} g_i^{hpd} \eta_i^{hpd}]$$

y

$$\Upsilon_2^{hpd}(x, v) = \sup_{z^{hpd}} \left[\sum_{i \in I} x_i^{hpd} \varphi_i^{hpd}(z^{hpd}) - \sum_{a \in A} v_a^{hpd} z_a^{hpd} \right]$$

En la restricción (39) se puede interpretar que las variables x_i^{hpd} corresponden al flujo neto de hogares tipo h que sale del nodo i con destino d , propósito p , mientras que g_i^{hpd} es la demanda de viajes con destino d , propósito p para un hogar tipo h en cada nodo i .

De este modo, dada la equivalencia de los problemas (29) y (36), para encontrar el equilibrio global ST&US el modelo propuesto busca la localización de hogares que maximiza el valor de la postura por los atributos de las zonas, bajo el supuesto que todos los hogares se localizan y no hay exceso de oferta. Lo anterior se justifica al estudiar los primeros dos términos de la función objetivo y las restricciones (37) y (38). El segundo término corresponde a una componente estocástica. Simultáneamente se maximiza el beneficio por viajar (tercer término) y en la red de transporte se recupera la formulación de Beckmann (Sheffi, 1985), representada en el cuarto término de la función objetivo y en las restricciones (39) y (40). Las últimas dos expresiones en la función objetivo permiten la interacción de los sistemas de transporte y uso de suelo. En la penúltima expresión se minimiza de forma agregada la diferencia entre el mínimo costo generalizado esperado por viajar y el costo generalizado neto. De manera similar en la última expresión se minimiza la diferencia entre el tiempo mínimo esperado en la elección de rutas y el tiempo efectivo de manera agregada en la red.

En síntesis, el modelo propuesto caracteriza al equilibrio como el vector que, satisfaciendo las restricciones de oferta y demanda inmobiliaria en el uso del suelo y las de conservación de flujo en la red de transporte, maximiza el beneficio total por viajar y el valor de los atributos de las zonas minimizando el error entre los costos esperados por viajar y los costos netos.

- Es necesario además notar que, a diferencia de los modelos (19) y (21), en (29) la cantidad de gente localizada en cada zona i , está acotada por la oferta en la zona, la cual se supone fija en este capítulo.

5. Extensión del modelo a oferta variable

En este capítulo se extiende el modelo (29) al caso en que la cantidad ofertada en cada zona i , S_i , no es conocida, sino que resulta de un proceso de decisión de las empresas inmobiliarias. Este proceso se refleja en una nueva condición de equilibrio en el mercado inmobiliario:

$$S_i = \sum_{k \in K} S_k \cdot \pi_{i/k} \quad (41)$$

donde K es el conjunto de empresas oferentes, S_k corresponde al total de viviendas que ofrece la empresa k y $\pi_{i/k}$ es la probabilidad que la empresa k genere oferta en la zona i , la cual depende de los costos de la empresa k y la renta en el equilibrio en cada zona.

Equivalentemente a incluir (41) a las condiciones de equilibrio, se puede modificar la condición (24) a:

$$\sum_{k \in K} S_k \cdot \pi_{i/k} = \sum_{h \in H} H_{hi} \quad (42)$$

la cual representa que la cantidad ofertada por las empresas constructoras en cada zona i debe coincidir con la cantidad total de hogares localizados en la zona. Esta condición también es considerada por el modelo RB&SM de Martínez y Henríquez (2003).

En el enfoque de redes, este nuevo nivel de decisión puede ser representado a través del flujo de oferta inmobiliaria desde nodos externos a la red de transporte, simbolizando las empresas inmobiliarias con su oferta total, hacia nodos de la red de transporte a través de arcos de oferta (ver Figura 3). En dicho nivel de decisión influye fuertemente las rentas y el costo de cada empresa por ofertar en cada zona ($r_i - c_{ik}$).

De este modo, el equilibrio del sistema integrado ST&US para el caso oferta variable, es caracterizado por las ecuaciones (23), (42) y (25).

Por simplicidad, primero se estudiará el caso monoprodutor para después extender el modelo obtenido al caso multiprodutor.

5.1. Caso monoprodutor

El problema de optimización que se considera en esta extensión, bajo el supuesto de que existe sólo una empresa inmobiliaria con oferta total S , es:

$$\min_{t,b,r} \Phi_4(t, b, r) := \sum_{a \in A} \int_0^{t_a} s_a^{-1}(z) dz + S \cdot \xi(r) + \sum_{h \in H} H_h b_h + \frac{1}{\mu} \sum_{\substack{h \in H \\ i \in I}} e^{\mu(B_h^i(b_h, t) - r_i)} \quad (43)$$

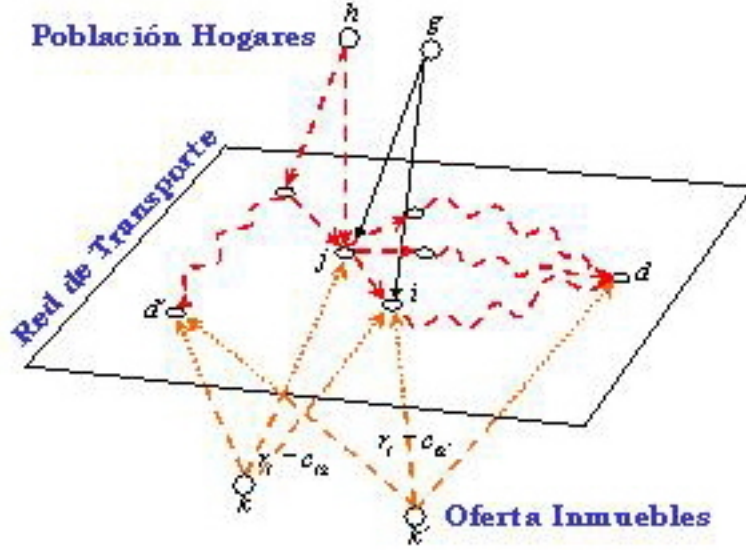


Figura 3: Red extendida con oferta variable

donde

$$\xi(r) = \frac{1}{\beta} \ln\left(\sum_{i \in I} \exp(\beta(r_i - c_i))\right)$$

$$B_h^i(b_h, t) = z_{hi} - \sum_{d \in D} N_h^d \tau_i^d(t) - b_h$$

El término $\xi(r)$ corresponde a la máxima utilidad esperada, cuando se supone que las utilidades por generar oferta en cada zona, $r_i - c_i \quad \forall i \in I$, poseen componentes aleatorias que distribuyen iid Gumbel con parámetro de escala β . De este modo, β es inversamente proporcional a la varianza del error considerado en las utilidades.

Cabe señalar que, al igual que en el problema (29), bajo el supuesto $S = \sum_{h \in H} H_h$, se cumple $\Phi_4(t, b + c, r - c) = \Phi_4(t, b, r)$, dado que $\xi(r - c) = \xi(r) - c$. Luego también es necesario suponer $b_1 = 0$ en este problema para mantener la unicidad, la cual se demuestra en la Proposición 3.

En cuanto a las condiciones de primer orden que satisface el único óptimo del problema (43), $\frac{\partial \Phi_4}{\partial b_h}(t, b, r) = 0$ y $\frac{\partial \Phi_4}{\partial t_a}(t, b, r) = 0$ reproducen las mismas condiciones de equilibrio que las obtenidas del modelo (29). La diferencia radica en $\frac{\partial \Phi_4}{\partial r_i}(t, b, r) = 0$.

En efecto,

$$\frac{\partial \Phi_4}{\partial r_i}(t, b, r) = S \cdot \frac{\partial \xi}{\partial r_i}(r) + \frac{1}{\mu} \sum_{h \in H} \underbrace{\exp(\mu(B_h^i(b_h, t) - r_i))}_{H_{hi}} \cdot (-\mu)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial r_i}(r) = \frac{\exp(\beta(r_i - c_i))}{\sum_{i \in I} \exp(\beta(r_i - c_i))} = \pi_i$$

que corresponde a la probabilidad de construir en i . De este modo,

$$\frac{\partial \Phi_4}{\partial r_i}(t, b, r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S \cdot \pi_i = \sum_{h \in H} H_{hi}$$

lo que corresponde a la condición de equilibrio (42) en el caso monoprodutor, donde K es un singleton. Una diferencia de la condición obtenida con la que se considera en RB&SM, es que esta última incluye economías de escala, por lo que las constantes c_i dependen del vector de cantidad ofertada en cada zona, de modo tal que la condición (42) corresponde a un punto fijo. En este trabajo no se considera ese caso.

De este modo, al mantenerse intactas las condiciones de primer orden asociadas a $\frac{\partial \Phi_4}{\partial b_h}(t, b, r) = 0$ y $\frac{\partial \Phi_4}{\partial t_a}(t, b, r) = 0$, el óptimo del problema (43) corresponde al equilibrio del sistema integrado ST&US en el caso de oferta variable.

5.2. Caso multiprodutor

Es fácil extender el modelo a múltiples empresas constructoras ($k \in K$) con funciones de costos por construir en la zona i (c_{ik}) y cantidades totales de viviendas por construir, S_k . Basta considerar el problema:

$$\min_{t, b, r} \Phi_5(t, b, r) := \sum_{a \in A} \int_0^{t_a} s_a^{-1}(z) dz + \sum_{k \in K} S_k \cdot \xi_k(r) + \sum_{h \in H} H_h b_h + \frac{1}{\mu} \sum_{\substack{h \in H \\ i \in I}} e^{\mu(B_h^i(b_h, t) - r_i)} \quad (44)$$

donde ahora

$$\xi_k(r) = \frac{1}{\beta_k} \ln\left(\sum_{i \in I} \exp(\beta_k(r_i - c_{ik}))\right)$$

También se obtiene existencia y unicidad, en este caso, bajo los supuestos $\sum_k S_k = \sum_h H_h$, (A_0) y $b_1 = 0$. Esto se demuestra en la Proposición 3.

Proposición 3. *Bajo (A_0) , $\sum_{h \in H} H_h = \sum_{k \in K} S_k$ y $b_1 = 0$, el problema (44) posee una única solución.*

Demostración Se probará que $\Phi_5(t, b, r)$ es estrictamente convexa y coerciva.

En la Proposición 2 se demostró la estricta convexidad en (t, b, r) de la función:

$$\sum_{a \in A} \int_0^{t_a} s_a^{-1}(z) dz + \sum_{h \in H} H_h b_h + \frac{1}{\mu} \sum_{\substack{h \in H \\ i \in I}} \exp(\mu(B_h^i(b_h, t) - r_i)).$$

De este modo, para probar la estricta convexidad de Φ_5 , basta ver que $\sum_k S_k \cdot \xi_k(r)$ es convexa, lo cual se debe a la convexidad de las funciones $\xi_k(r)$.

Para la coercividad, es necesario calcular:

$$\xi_k^\infty(r) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda \beta_k} \ln \sum_{i \in I} \exp(\lambda \beta_k (r_i - \frac{c_{ik}}{\lambda})) = \begin{cases} \max_{i \in I} r_i = \bar{r} & \text{si } \exists r_i > 0 \text{ o } r_i < 0 \quad \forall i \in I \\ 0 & \text{si } \exists r_i = 0 \text{ y } r_i \leq 0 \quad \forall i \in I \end{cases}$$

En resumen, $\xi_k^\infty(r) = \bar{r} = \max_i r_i$.

Luego, para el caso $t \neq 0$, de manera análoga a la demostración de la Proposición 3, se obtiene:

$$\Phi_5^\infty(t, b, r) > \varphi^\infty(t) + \sum_h H_h b_h + \sum_k S_k \cdot \xi_k^\infty(r) = \varphi^\infty(t) + \sum_h H_h b_h + \bar{r} \sum_k S_k = +\infty > 0$$

pues $\varphi^\infty(t) = +\infty$, lo que implica que Φ_5 es coerciva.

En el caso $t = 0$, de forma análoga a la demostración de la Proposición 3, se obtiene:

$$\begin{aligned} \Phi_5^\infty(0, b, r) &= \sum_h H_h b_h + \bar{r} \sum_k S_k + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda \mu} \sum_{h,i} \exp(\lambda \mu (Z_{hi}^\infty(0) - b_h - r_i)) \\ &= \sum_h H_h b_h + \bar{r} \sum_k S_k + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda \mu} \sum_{h,i} \exp(-\lambda \mu (b_h + r_i)) \end{aligned}$$

Del mismo modo, si $\exists h, i$ tq $b_h + r_i < 0$ entonces $\Phi_5^\infty(0, b, r) = +\infty > 0$. Si, por el contrario, $\forall h, i; b_h + r_i \geq 0$ entonces $\underline{b} := \min_h b_h \geq -\min_i r_i =: -\underline{r}$ de modo tal que, de manera similar a la Proposición 2, ya sea $\forall h, b_h = \underline{b}$ y $\forall i, r_i = \underline{r}$ o bien $\exists h$ tq $b_h > \underline{b}$ o $\exists i$ tq $r_i > \underline{r}$, se cumple:

$$\Phi_5^\infty(0, b, r) \geq \sum_h H_h b_h + \bar{r} \sum_k S_k > \underline{r} (\sum_k S_k - \sum_h H_h) = 0.$$

De cualquier modo se obtiene $\Phi_5^\infty(0, b, r) > 0$, lo que concluye el resultado. \blacksquare

Las condiciones de primer orden que satisface el óptimo del problema (44) corresponden a:

$$\sum_{k \in K} S_k \cdot \pi_{i/k} = \sum_{h \in H} H_{hi} \quad \forall i \in I \quad (45)$$

donde

$$\pi_{i/k} := \frac{\exp(\beta_k (r_i - c_{ik}))}{\sum_{j \in I} \exp(\beta_k (r_j - c_{jk}))} \quad (46)$$

El término (46) corresponde a la probabilidad que la empresa inmobiliaria tipo k decida generar oferta en i . De este modo, se obtiene la condición de equilibrio (42), de donde se deduce que el óptimo del problema (44) corresponde al equilibrio ST&US.

Observaciones:

- Cabe señalar que se pueden incluir restricciones en las decisiones de localización y construcción, como por ejemplo que ciertos tipos de hogar no se puedan localizar y que ciertas empresas no puedan ofrecer bienes inmuebles en algunas zonas. Para esto basta considerar que en la red genérica hay arcos que no existen entre las empresas u hogares y aquellas zonas a las que éstos están restringidos. De esa manera no pueden existir flujos de localización o construcción a dichas zonas. Esta modificación es análoga a la efectuada en el problema (34).
- Además se puede levantar el supuesto que las empresas de oferta inmobiliaria conocen cuánto van a producir en total (S_k), incluyendo una función de oferta creciente, dependiendo del máximo beneficio esperado, $S_k(\xi_k(r))$. Esto se logra a través del siguiente problema de optimización:

$$\min_{t,r,b} \sum_{a \in A} \int_0^{t_a} s_a^{-1}(z) dz + \sum_{k \in K} \int_0^{\xi_k(r)} S_k(w) dw + \sum_{h \in H} H_h b_h + \frac{1}{\mu} \sum_{\substack{h \in H \\ i \in I}} e^{\mu(B_h^i(b_h,t) - r_i)} \quad (47)$$

Para mantener la convexidad de la función objetivo, las funciones $S_k(\cdot)$ deben ser crecientes y no negativas. Del mismo modo que en la sección anterior, la coercividad se mantendrá si las funciones $S_k(\cdot)$ cumplen $\lim_{x \rightarrow \infty} S_k(x) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} S_k(x) = -\infty$, o bien si $\lim_{x \rightarrow -\infty} S_k(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} S_k(x) = \bar{S}_k$. En este último caso, es necesario suponer $\sum_{k \in K} \bar{S}_k = \sum_{h \in H} H_h$ para mantener la coercividad de la función objetivo. Bajo estos supuestos, se mantiene la unicidad del óptimo del problema (47).

6. Inclusión de la Distribución de viajes en el modelo

En los modelos anteriormente desarrollados, no está incluido el nivel de decisión de la elección del destino de los viajes, llamado *distribución de viajes*. De hecho, las constantes N_h^d son las que entregan la cantidad de viajes que hace cada hogar o firma hacia cada destino. El objetivo principal de este capítulo es incorporar este nivel de decisión, para lo cual es necesario introducir el concepto de *propósito* en los viajes.

Propósito, según la Real Academia de la Lengua Española, corresponde a *ánimo o intención de hacer algo*. En este caso, el propósito de un viaje corresponde a la razón por la cuál éste se lleva a cabo. Como ejemplos de propósitos se encuentran los de trabajo, estudio, trámites, compras, salud, etc. Para poder llevar a cabo cada intención o propósito de los viajes, debe existir espacios físicos asociados, los cuales se encuentran en algunos destinos. De este modo, dentro del enfoque ocupado en este trabajo, cada propósito puede ser modelado a través de un nuevo nodo en la red de localización y transporte, al cual se puede acceder por medio de arcos desde los destinos que contemplan dicho propósito. La Figura 4 permite visualizar esta extensión gráficamente.

En esta representación, si se conoce la cantidad de viajes que genera cada hogar por cada propósito, la elección de destino se realiza dependiendo del costo o tiempo mínimo esperado desde cada origen a cada destino. De este modo, en búsqueda de un propósito específico, el destino con mínimo tiempo esperado en ser alcanzado será el más probable de ser elegido, entre los que contemplan dicho propósito.

Un segundo objetivo es incorporar la elección de propósito en los viajes además de la elección de destino, de modo tal que dentro de los propósitos sea más probable elegir aquél que tenga mayor utilidad esperada, definiendo consistentemente esta utilidad para cada propósito. Luego de determinar cuántos viajes se realizan por propósito, la elección de destino se realiza de manera idéntica a lo anteriormente descrito.

En ambos objetivos, se desea mantener la estructura logit en las decisiones. Por otra parte, se considerará oferta y demanda fijas, por lo cual las condiciones de equilibrio del sistema integrado ST&US serán (23), (24) y (25).

6.1. Elección del destino de los viajes

En esta parte se incorporará la elección de destino de los viajes en el modelo, considerando la cantidad de viajes generados por propósito como información exógena e intentando mantener las condiciones de primer orden del óptimo de la función objetivo, las cuales lo caracterizan como el equilibrio del sistema integrado de transporte y uso de suelo. Para esto se considerará la función objetivo considerada en el problema (29), con supuestos de oferta y demanda fijas, considerando la siguiente función de disposición a pagar:

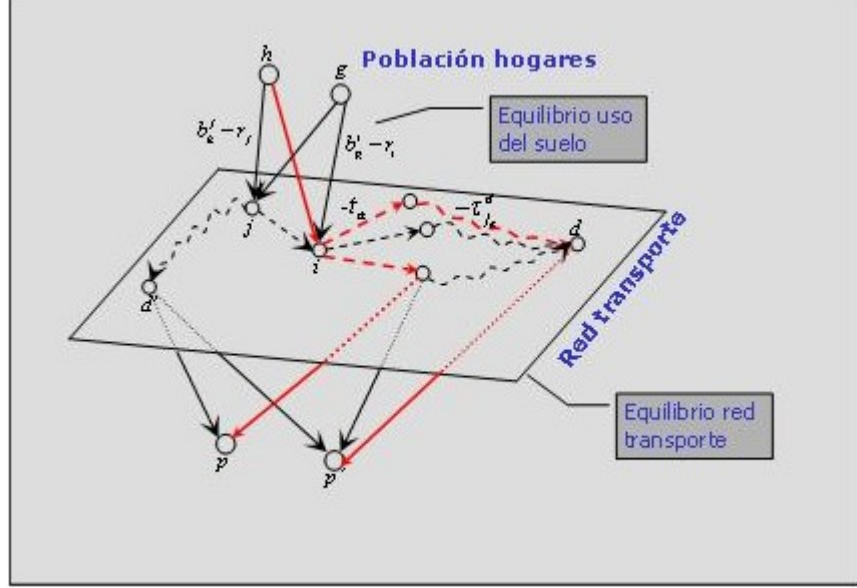


Figura 4: Red Extendida con Propósitos

$$B_h^i(b_h, t) = z_{hi} - \sum_{p \in P} N_h^p \alpha_{hi}^p(t) - b_h \quad (48)$$

donde N_h^p es la cantidad de viajes generados por el hogar tipo h con propósito p y $\alpha_{hi}^p(t)$ corresponde al costo mínimo esperado en alcanzar el propósito p para un hogar tipo h partiendo de la zona i , cuando los costos tienen componentes aleatorias que distribuyen iid Gumbel con parámetro de escala μ_{hi}^p . Analíticamente:

$$\alpha_{hi}^p(t) \triangleq -\frac{1}{\mu_{hi}^p} \ln\left(\sum_{d \in Q_p^-} \exp(-\mu_{hi}^p c_{hi}^{dp}(t))\right) \quad (49)$$

donde $c_{hi}^{dp}(t) = \tau_i^d(t) - \gamma_h^{dp}$ representa el costo generalizado por elegir d como destino desde la zona i , el que incluye al tiempo mínimo esperado $\tau_i^d(t)$ y el beneficio percibido por los distintos tipos de agentes h debido a las actividades propias del lugar d , el cual puede depender del propósito p del viaje. Tales beneficios se agrupan en el término γ_h^{dp} . A modo de ejemplo, este término puede modelar la importancia del establecimiento a priori en un lugar de trabajo para los viajes con este propósito. El término $\alpha_{hi}^p(t)$ considera sólo los costos generalizados de los destinos que contemplan el propósito p (Q_p^-), los cuales son definidos a través de la estructura de la red extendida mediante nodos ficticios representando cada propósito a los cuales se accede a través de arcos que parten desde los destinos donde es posible cumplir dichos propósitos. Por otro lado, el parámetro μ_{hi}^p es inversamente proporcional a la varianza de los errores considerados en los costos generalizados $c_{hi}^{dp}(t)$.

Bajo los mismos supuestos de la Proposición 2, se tiene existencia y unicidad del óptimo para este problema, lo cual se demuestra en la Proposición 4.

Proposición 4. *Bajo (A_0) , $\sum_{h \in H} H_h = \sum_{i \in I} S_i$ y $b_1 = 0$, el problema (29) con función de disposición a pagar (48) posee una única solución.*

Demostración Se probará que $\Phi_3(t, b, r)$ es estrictamente convexa y coerciva cuando la función de disposición a pagar corresponde a $B_h^i(b_h, t) = z_{hi} - \sum_{p \in P} N_h^p \alpha_{hi}^p(t) - b_h$. Según lo demostrado en la Proposición 2, basta probar que $B_h^i(b_h, t)$ es convexa para que $\Phi_3(t, b, r)$ sea estrictamente convexa. Es sabido que la función:

$$\gamma_\beta(x) = -\frac{1}{\beta} \ln \sum_{i \in I} e^{-\beta x_i}$$

es una función cóncava y creciente por componentes cuando $\beta > 0$. De hecho $\gamma_\beta(\cdot) \in \mathcal{E}$. Como de Baillon y Cominetti (2004) se sabe que las funciones $\tau_i^d(t)$ son cóncavas, entonces $c_{hi}^{dp}(t)$ y $\alpha_{hi}^p(t) = \gamma_{\mu_{hi}^p}(c_{hi}^{dp}(t); d \in Q_p^-)$ son cóncavas. De ese modo, $B_h^i(b_h, t)$ es convexa.

Para ver la coercividad, es útil calcular:

$$(\alpha_{hi}^p)^\infty(t) = \gamma_{\mu_{hi}^p}^\infty((c_{hi}^{dp})^\infty(t); d \in Q_p^-)$$

donde $(c_{hi}^{dp})^\infty(t) = (\tau_i^d)^\infty(t) = \bar{\tau}_i^d(t)$. Además, de Baillon y Cominetti (2004) se sabe que $\gamma_\beta^\infty(x) = \min_{i \in I}(x_i)$. De ese modo,

$$(\alpha_{hi}^p)^\infty(t) = \min_{d \in Q_p^-} \bar{\tau}_i^d(t) =: \bar{\tau}_i^p(t)$$

donde $\bar{\tau}_i^p(t)$ corresponde al tiempo mínimo determinístico para alcanzar el propósito p , considerando todos los destinos que consideran dicho propósito ($d \in Q_p^-$).

Así, $Z_{hi}^\infty(t) = -\sum_{p \in P} N_h^p \cdot \bar{\tau}_i^p(t)$, donde $Z_{hi}(t) = z_{hi} - \sum_{p \in P} N_h^p \cdot \alpha_{hi}^p(t)$. Como se cumple que $Z_{hi}^\infty(0) = 0$, la demostración de la coercividad de Φ_3 se concluye análogamente a la demostración de la Proposición 2. ■

En las condiciones de primer orden que satisface el óptimo, se obtienen modificaciones sólo en las condiciones asociadas a $\frac{\partial \Phi_3}{\partial t_a}(t, b, r) = 0$.

En efecto,

$$\forall a \in A, \quad \frac{\partial \Phi_3}{\partial t_a}(t, b, r) = s_a^{-1}(t_a) + \frac{1}{\mu} \sum_{\substack{h \in H \\ i \in I}} \underbrace{\exp(\mu(B_h^i(b_h, t) - r_i))}_{H_{hi}} \cdot \mu \frac{\partial B_h^i}{\partial t_a}(b_h, t),$$

donde ahora

$$\frac{\partial B_h^i}{\partial t_a}(b_h, t) = -\sum_{p \in P} N_h^p \cdot \frac{\partial \alpha_{hi}^p}{\partial t_a}(t) = -\sum_{p \in P} N_h^p \cdot \underbrace{\sum_{\substack{d \in Q_p^- \\ k \in Q_p^-}} \frac{e^{-\mu_{hi}^p c_{hi}^{dp}(t)}}{\sum_{k \in Q_p^-} e^{-\mu_{hi}^p c_{hi}^{kp}(t)}}}_{P_{d/hpi}} \frac{\partial \tau_i^d}{\partial t_a}(t) \quad (50)$$

$$= - \sum_{p \in P} \sum_{d \in Q_p^-} \underbrace{N_h^p P_{d/hpi}}_{\triangleq N_{hi}^{dp}} \frac{\partial \tau_i^d}{\partial t_a}(t).$$

El término $N_{hi}^{dp} \triangleq N_h^p P_{d/hpi}$ corresponde a los viajes con destino d y propósito p generados en la zona i por un hogar tipo h .

$$\therefore \frac{\partial \Phi_3}{\partial t_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad s_a^{-1}(t_a) = \sum_{\substack{h \in H \\ i \in I}} \sum_{p \in P} \sum_{d \in Q_p^-} \underbrace{H_{hi} N_{hi}^{dp}}_{g_i^{dph}} \frac{\partial \tau_i^d}{\partial t_a}(t) = \sum_{d \in D} \sum_{i \neq d} \underbrace{\left(\sum_{\substack{h \in H \\ p \in Q_d^+}} g_i^{dph} \right)}_{g_i^d} \frac{\partial \tau_i^d}{\partial t_a}(t)$$

donde $g_i^{dph} \triangleq H_{hi} N_{hi}^{dp}$ corresponde al total de viajes generados por hogares tipo h en la zona i , con destino d y propósito p y $g_i^d = \sum_{h \in H} \sum_{p \in Q_d^+} g_i^{dph}$ es el total de viajes generados desde i a d . De este modo se obtiene la distribución de viajes de una manera endógena, que incluye un modelo logit en la elección de destinos. Una vez obtenidas las variables g_i^d del modelo de distribución de viajes, el desarrollo es análogo al de Baillon y Cominetti (2004):

$$s_a^{-1}(t_a) = \sum_{d \in D} \sum_{i \neq d} g_i^d \frac{\partial \tau_i^d}{\partial t_a}(t) = \sum_{d \in D} \langle g^d, \frac{\partial \tau^d}{\partial t_a}(t) \rangle = \sum_{d \in D} v_a^d = w_a$$

Se concluye que $s_a(w_a) = t_a$, lo que permite mantener las condiciones de equilibrio global ST&US.

6.2. Elección de propósitos y destinos de los viajes

A diferencia del modelo anterior, en esta modificación se supone conocido sólo el total de viajes generados por cada tipo de hogar o firma, sin desagregación por propósito. La cantidad de viajes por propósito es decidido por cada tipo de hogar según los beneficios esperados que cada propósito reporta. La función de disposición a pagar, que define el comportamiento de los hogares y firmas, en este caso corresponde a:

$$B_h^i(b_h, t) = z_{hi} + N_h \cdot U_{hi}(t) - b_h \quad (51)$$

donde N_h es el total de viajes generados por un hogar tipo h . Además,

$$U_{hi}(t) = \frac{1}{\eta_{hi}} \ln \left(\sum_{p \in P_h} \exp(\eta_{hi} \chi_{hi}^p(t)) \right)$$

donde P_h es el conjunto de propósitos que considera cada tipo de hogar h , lo cual está definido en la estructura de la red extendida. Por razones de simplicidad, se supondrá que $P_h = P$. Se define $\chi_{hi}^p(t) = \rho_{hi}^p - \alpha_{hi}^p(t)$, donde $\alpha_{hi}^p(t)$, definido en (49),

corresponde al mínimo costo generalizado esperado para un hogar tipo h por hacer un viaje con propósito p desde la zona i , el cual contempla todos los posibles destinos asociados al propósito p . Por su parte, el término ρ_{hi}^p corresponde a una medida del beneficio percibido por un hogar tipo h por realizar un viaje desde i con propósito p . De este modo, $\chi_{hi}^p(t)$ es la utilidad asociada al viaje (beneficio menos costo) y $U_{hi}(t)$ corresponde a la máxima utilidad esperada en realizar un viaje a cualquier propósito, cuando se supone que las utilidades $\chi_{hi}^p(t)$ tienen componentes aleatorias que distribuyen iid Gumbel con parámetro de escala η_{hi} . Este parámetro es inversamente proporcional a la varianza de los errores considerados en estas utilidades.

El modelo que se presenta en esta parte corresponde nuevamente al problema (29), considerando las funciones de disposición a pagar definidas en (51). Bajo las mismas condiciones de las Proposición 4, se mantiene la existencia y unicidad del óptimo del problema, lo cual se demuestra en la Proposición 5.

Proposición 5. *Bajo (A_0) , $\sum_{h \in H} H_h = \sum_{k \in K} S_k$ y $b_1 = 0$, el problema (29) con función de disposición a pagar (51) posee una única solución.*

Demostración Se probará que $\Phi_3(t, b, r)$ es estrictamente convexa y coerciva cuando la función de disposición a pagar corresponde a $B_h^i(b_h, t) = z_{hi} + N_h \cdot U_{hi}(t) - b_h$. Según lo demostrado en la Proposición 2, basta probar que $B_h^i(b_h, t)$ es convexa para que $\Phi_3(t, b, r)$ sea estrictamente convexa. Como $\alpha_{hi}^p(t)$ es cóncava, según se demostró en la Proposición 4, la función $\chi_{hi}^p(t) = \rho_{hi}^p - \alpha_{hi}^p(t)$ es convexa. Por lo tanto, $U_{hi}(t) = \hat{\gamma}_{\eta_{hi}}(\chi_{hi}^p; p \in P)$ es convexa, dado que $\hat{\gamma}_\mu(x) = \frac{1}{\mu} \ln \sum_{i \in I} \exp(\mu x_i)$ es convexa y creciente por componentes para $\mu > 0$. Por lo tanto, $B_h^i(b_h, t)$ es convexa.

Para la coercividad, es necesario calcular:

$$(U_{hi}^p)^\infty(t) = \hat{\gamma}_{\eta_{hi}}^\infty((\chi_{hi}^p)^\infty(t); p \in P)$$

Pero $(\chi_{hi}^p)^\infty(t) = -(\alpha_{hi}^p)^\infty(t) = -\bar{\tau}_i^p(t)$, según lo demostrado en la Proposición 4. Además $\hat{\gamma}_\mu^\infty(x) = \max_{i \in I}(x_i)$, de modo tal que se cumple:

$$(U_{hi}^p)^\infty(t) = \max_{p \in P} -\bar{\tau}_i^p(t) = -\min_{p \in P} \bar{\tau}_i^p(t) =: -\bar{\tau}_i(t)$$

donde $\bar{\tau}_i(t)$ corresponde al tiempo mínimo determinístico por generar un viaje desde i con cualquier propósito.

De este modo $Z_{hi}^\infty(t) = -N_h \cdot \bar{\tau}_i(t)$, donde $Z_{hi}^\infty(t)$ es la función de recesión de $Z_{hi}(t) = z_{hi} + N_h \cdot U_{hi}(t)$. También se tiene que $Z_{hi}^\infty(0) = 0$ por lo que la coercividad se concluye de forma análoga a la Proposición 4. ■

En las condiciones de primer orden que satisface el óptimo en este caso, basta considerar $\frac{\partial \Phi_3}{\partial t_a}(t, b, r) = 0$:

$$\forall a \in A, \quad \frac{\partial \Phi_3}{\partial t_a}(t, b, r) = s_a^{-1}(t_a) + \frac{1}{\mu} \sum_{\substack{h \in H \\ i \in I}} \underbrace{\exp(\mu(B_h^i(b_h, t) - r_i))}_{H_{hi}} \cdot \mu \frac{\partial B_h^i}{\partial t_a}(b_h, t),$$

donde ahora

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_h^i}{\partial t_a}(b_h, t) &= N_h \cdot \frac{\partial U_{hi}}{\partial t_a}(t) = N_h \cdot \sum_{p \in P} \left(\frac{1}{\eta_{hi}} \right) \underbrace{\frac{\exp(\eta_{hi} \chi_{hi}^p(t))}{\sum_{q \in P} \exp(\eta_{hi} \chi_{hi}^q(t))}}_{P_{p/hi}} (\eta_{hi}) \left(-\frac{\partial \alpha_{hi}^p}{\partial t_a}(t) \right) \quad (52) \\ &= - \sum_{p \in P} \underbrace{N_h P_{p/hi}}_{\triangleq N_{hi}^p} \frac{\partial \alpha_{hi}^p}{\partial t_a}(t) \end{aligned}$$

donde $P_{p/hi}$ corresponde a la probabilidad de elegir p como propósito de viajes generados por un hogar tipo h desde la zona i y $N_{hi}^p \triangleq N_h P_{p/hi}$ corresponde a la cantidad de viajes con propósito p generados en la zona i por un hogar tipo h . De este modo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_h^i}{\partial t_a}(b_h, t) &= - \sum_{p \in P} N_{hi}^p \cdot \frac{\partial \alpha_{hi}^p}{\partial t_a}(t) = - \sum_{p \in P} N_{hi}^p \cdot \sum_{d \in Q_p^-} \underbrace{\frac{\exp(-\mu_{hi}^p c_{hi}^{dp}(t))}{\sum_{k \in Q_p^-} \exp(-\mu_{hi}^p c_{hi}^{kp}(t))}}_{P_{d/hpi}} \frac{\partial \tau_i^d}{\partial t_a}(t) \\ &= - \sum_{p \in P} \sum_{d \in Q_p^-} \underbrace{N_{hi}^p P_{d/hpi}}_{\triangleq N_{hi}^{dp}} \frac{\partial \tau_i^d}{\partial t_a}(t), \end{aligned}$$

y se concluye de manera análoga a la desarrollada a partir de (50), consiguiendo las condiciones de equilibrio en la red de transporte (25). De aquí se deduce que el óptimo del problema (29), con función de disposición a pagar (51), corresponde al equilibrio global del sistema integrado ST&US.

Observaciones:

- Se puede considerar que la generación de viajes de cada hogar h , ya sea desagregada o no por propósito, dependa de la zona i en que se encuentra localizado. Es decir, considerar constantes exógenas N_{hi}^p y N_{hi} en vez de N_h^p y N_h , respectivamente. Esta modificación no altera las condiciones de equilibrio global ST&US.
- Es posible considerar que las elecciones a nivel de arcos del sistema de transporte dependen, además del destino d del viaje, del hogar tipo h que lo genera y el propósito p del mismo. Para ello, basta considerar funciones $\tau_i^{dph}(t)$ en vez de las anteriormente utilizadas $\tau_i^d(t)$ para modelar los tiempos mínimos esperados en el sistema de transporte. De forma análoga a los modelos presentados anteriormente:

$$\tau_i^{dph}(t) = \varphi_i^{dph} \left(t_a + \underbrace{\tau_{j_a}^{dph}(t)}_{z_a^{dph}} \right); \quad a \in A_i^+,$$

con la familia de funciones $\varphi_i^{dph}(\cdot)$ perteneciendo a \mathcal{E} .

Con esta modificación, las probabilidades de elegir uno u otro arco también dependerán del tipo de hogar h , del destino d y del propósito p del viaje realizado. En términos analíticos, se tendrá:

$$P_{ij_a}^{dph} = \frac{\partial \varphi_i^{dph}}{\partial z_a^{dph}}(z^{dph}).$$

Bajo este nuevo enfoque, si en el problema (29) se considera la función de disposición a pagar (48), con la misma definición de $\alpha_{hi}^p(t)$, pero donde ahora $c_{hi}^{dp}(t) = \tau_i^{dph}(t) - \gamma_h^{dp}$, se obtiene como condición de primer orden:

$$s_a^{-1}(t_a) = \sum_{h \in H} \sum_{p \in P} \sum_{d \in Q_p^-} \sum_{i \in I} \underbrace{H_{hi} N_h^p P_{d/hpi}}_{g_i^{dph}} \frac{\partial \tau_i^{dph}}{\partial t_a}(t) = \sum_{h \in H} \sum_{p \in P} \sum_{d \in Q_p^-} \langle g^{dph}, \frac{\partial \tau^{dph}}{\partial t_a}(t) \rangle$$

de donde se puede definir $v_a^{dph} = \langle g^{dph}, \frac{\partial \tau^{dph}}{\partial t_a}(t) \rangle$, que al igual que en MTE se puede demostrar que corresponde al flujo total de viajes por el arco a generados por hogares tipo h , que tienen destino d y propósito p , independiente de la zona donde se hayan generado. De este modo se obtiene:

$$s_a^{-1}(t_a) = \sum_{h \in H} \sum_{p \in P} \sum_{d \in Q_p^-} v_a^{dph} =: w_a \quad (53)$$

donde w_a , al igual que antes, corresponde al flujo total por el arco a .

Por otro lado, si se considera el mismo problema, pero con función de disposición a pagar (51), bajo este enfoque y la nueva definición de los costos $c_{hi}^{dp}(t)$, se obtienen las siguientes condiciones de primer orden:

$$s_a^{-1}(t_a) = \sum_{h \in H} \sum_{p \in P} \sum_{d \in Q_p^-} \sum_{i \in I} \underbrace{H_{hi} N_h P_{p/hi} P_{d/hpi}}_{g_i^{dph}} \frac{\partial \tau_i^{dph}}{\partial t_a}(t)$$

de donde se obtiene de manera análoga la misma condición obtenida en (53).

La diferencia de este enfoque con el anterior, es que los viajes por los arcos están desagregados no sólo por propósito p , sino que también por el tipo de hogar h que generó el viaje y el destino d del mismo. Del mismo modo, es posible desagregar aún más los viajes por los arcos, si se considera necesario diferenciar otra característica de éstos. En ambos casos se concluye que $s_a(w_a) = t_a$, lo que permite mantener las condiciones de equilibrio global ST&US.

- En el caso de que las variables aleatorias asociadas a los errores en la percepción de los tiempos de viaje en el sistema de transporte distribuyan Gumbel iid, las funciones $\tau_i^{dph}(t)$ corresponden a las logsumas:

$$\tau_i^{dph}(t) = -\frac{1}{\beta_i^{dph}} \ln \left(\sum_{a \in A_i^+} \exp(-\beta_i^{dph}(t_a + \tau_{j_a}^{dph}(t))) \right)$$

El parámetro β_i^{dph} es inversamente proporcional a la varianza del error, por lo que mientras mayor es este parámetro, el problema se vuelve más determinista en las decisiones. Una alternativa que permite reducir considerablemente los parámetros a estimar del modelo, es considerar que β_i^{dph} es inversamente proporcional con la distancia euclideana entre i y j , es decir, suponer que:

$$\beta_i^{dph} = \frac{\beta^{ph}}{d_i^j}$$

Esto es razonable en el sentido de que a medida que mayor es la distancia que hay que recorrer, es menos perceptible una misma diferencia de costos en tiempo entre dos rutas, o lo que es lo mismo, aumenta la varianza del error en la percepción del tiempo.

Por otro lado, en este caso, las probabilidades de elección de arcos son de la siguiente forma:

$$P_{ij_a}^{dph} = \frac{\exp(-\beta_i^{dph}(t_a + \tau_{j_a}^{dph}(t)))}{\sum_{b \in A_i^+} \exp(-\beta_i^{dph}(t_b + \tau_{j_b}^{dph}(t)))} = \frac{\exp(-\beta^{ph}(\frac{t_a + \tau_{j_a}^{dph}(t)}{d_i^j}))}{\sum_{b \in A_i^+} \exp(-\beta^{ph}(\frac{t_b + \tau_{j_b}^{dph}(t)}{d_i^j}))},$$

lo cual implica que, conocido el destino d que se quiere alcanzar y sabiendo que se está en i , se elige con mayor probabilidad el arco $a \in A_i^+$ que asegure la mayor velocidad esperada para alcanzar d , lo cual es bastante razonable.

7. Inclusión de la Generación de Viajes en el Modelo

En los modelos anteriores, se asume como información exógena y conocida la cantidad de viajes generados por los distintos tipos de hogares en cada zona i , ya sea agregados o desagregados por propósitos dependiendo del modelo. Este supuesto puede ser levantado si se estiman funciones de demanda de viajes de los hogares que dependan de los beneficios o costos esperados de viajar. De este modo, la cantidad de viajes por realizar de cada hogar se determina según estos beneficios o costos.

Al igual que en la sección anterior, se pueden considerar modelos con o sin elección de propósito.

7.1. Generación de viajes en modelos sin elección de propósito

En este caso se suponen conocidas funciones de demanda de viajes según propósito para cada tipo de hogar: $N_h^p(\cdot)$. La función de disposición a pagar se modifica de la siguiente manera:

$$B_h^i(b_h, t) = z_{hi} - \sum_{p \in P} \int_0^{\alpha_{hi}^p(t)} N_h^p(\xi) d\xi - b_h \quad (54)$$

Cabe señalar que el modelo de distribución sin elección de propósito es un caso particular de este modelo, cuando $N_h^p(\cdot) = N_h^p$.

Para mantener existencia y unicidad del óptimo del problema de optimización (29) con función de disposición a pagar (54), se supondrá que las funciones $N_h^p(\cdot)$ son decrecientes y no negativas. Esto se demuestra en la Proposición 6.

Proposición 6. *Supongamos (A_0) , $\sum_{h \in H} H_h = \sum_{k \in K} S_k$ y $b_1 = 0$. Además, supongamos que las funciones $N_h^p(\cdot)$ son integrables, decrecientes, no negativas y satisfacen:*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} N_h^p(x) = \bar{N}_h^p \geq 0. \quad (55)$$

Entonces el problema (29) con función de disposición a pagar (54) posee una única solución.

Demostración Al igual que en las demostraciones de las Proposiciones 4 y 5, para la convexidad de Φ_3 basta verificar la convexidad de $B_h^i(b_h, t)$ y para su coercividad, basta notar que $Z_{hi}^\infty(0) = 0$ donde:

$$Z_{hi}(t) = z_{hi} - \sum_{p \in P} \int_0^{\alpha_{hi}^p(t)} N_h^p(x) dx$$

Para $t \neq 0$, se tiene:

$$Z_{hi}^{\infty}(t) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{z_{hi}}{\lambda} - \sum_{p \in P} \frac{1}{\lambda} \int_0^{\alpha_{hi}^p(\lambda t)} N_h^p(x) dx = - \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{p \in P} \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda \bar{\tau}_i^p(t)} N_h^p(x) dx$$

Si se cumple que $\int_0^{+\infty} N_h^p(x) dx = +\infty$, usando l'Hôpital se obtiene:

$$Z_{hi}^{\infty}(t) = - \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{p \in P} N_h^p(\lambda \bar{\tau}_i^p(t)) \cdot \bar{\tau}_i^p(t) = - \sum_{p \in P} \bar{N}_h^p \bar{\tau}_i^p(t)$$

Si para algunos h, p se tiene $\int_0^{+\infty} N_h^p(x) dx < +\infty$ entonces:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \int_0^{\alpha_{hi}^p(\lambda t)} N_h^p(x) dx = 0$$

Por lo tanto, definiendo el conjunto $P_h = \{p \in P; \int_0^{+\infty} N_h^p(x) dx = +\infty\}$, se obtiene:

$$Z_{hi}^{\infty}(t) = - \sum_{p \in P_h} \bar{N}_h^p \bar{\tau}_i^p(t)$$

Se tiene que $Z_{hi}^{\infty}(0) = 0$, por lo que la demostración de la coercividad concluye al igual que en la Proposición 5.

Para la convexidad, si $N_h^p(\cdot)$ es decreciente y no negativa, entonces $G_h^p(x) = \int_0^x N_h^p(z) dz$ es una función cóncava y creciente. Como se demostró en la Proposición 4, las funciones $\alpha_{hi}^p(t)$ son cóncavas, lo que implica que $G_h^p(\alpha_{hi}^p(t))$ es cóncava. De este modo, $B_h^i(b_h, t) = z_{hi} - \sum_{p \in P} G_h^p(\alpha_{hi}^p(t)) - b_h$ es convexa de donde se concluye el resultado. ■

Cabe señalar que la condición de decrecimiento de estas funciones es razonable, a mayor costo, menor demanda.

Al igual que en los modelos anteriores, para ver que las condiciones de equilibrio del sistema ST&US se cumplen, basta con ver las condiciones de primer orden asociadas a $\frac{\partial \Phi_3}{\partial t_a}$. Se obtiene análogamente:

$$\forall a \in A, \quad \frac{\partial \Phi_3}{\partial t_a} = s_a^{-1}(t_a) + \sum_{\substack{h \in H \\ i \in I}} H_{hi} \cdot \frac{\partial b_h^i}{\partial t_a}(b_h, t),$$

pero donde ahora:

$$\frac{\partial B_h^i}{\partial t_a}(b_h, t) = - \sum_{p \in P} N_h^p(\alpha_{hi}^p(t)) \cdot \frac{\partial \alpha_{hi}^p}{\partial t_a}(t)$$

El término $N_h^p(\alpha_{hi}^p(t))$ corresponde a la cantidad de viajes generados por un hogar tipo h en la zona i con propósito p , y depende del costo mínimo esperado por realizar un viaje con estas características, $\alpha_{hi}^p(t)$.

Con argumentos idénticos a los desarrollados a partir de (50), se obtienen las condiciones de equilibrio en la red de transporte: $s_a(w_a) = t_a$. De esta forma, el óptimo mantiene las condiciones de equilibrio global ST&US.

7.2. Generación de viajes en modelos con elección de propósito

En este caso, basta con conocer las funciones de demanda de cada hogar, sin desagregación por propósito: $N_h(\cdot)$. La función de disposición a pagar considerada en este caso es:

$$B_h^i(b_h, t) = z_{hi} + \int_0^{U_{hi}(t)} N_h(\xi) d\xi - b_h \quad (56)$$

Cabe señalar que el modelo de distribución con elección de propósito es un caso particular de este modelo, cuando $N_h(\cdot) = N_h$.

Para mantener existencia y unicidad del óptimo del problema de optimización (29) con función de disposición a pagar (54), se supondrá que las funciones $N_h(\cdot)$ son crecientes y no negativas. Esto se demuestra en la Proposición 7.

Proposición 7. *Supongamos (H_0) , $\sum_{h \in H} H_h = \sum_{k \in K} S_k$ y $b_1 = 0$. Además, supongamos que las funciones $N_h(\cdot)$ son integrables, crecientes, no negativas y satisfacen:*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} N_h(x) = \bar{N}_h \geq 0. \quad (57)$$

Entonces el problema (29) con función de disposición a pagar (56) posee una única solución.

Demostración Al igual que en las demostraciones de la Proposición 6, para la convexidad de Φ_3 basta verificar la convexidad de $B_h^i(b_h, t)$ y para su coercividad, basta notar que $Z_{hi}^\infty(0) = 0$, donde ahora:

$$Z_{hi}(t) = z_{hi} + \int_0^{U_{hi}(t)} N_h(x) dx$$

Si $t \neq 0$, se tiene:

$$Z_{hi}^\infty(t) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{z_{hi}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{U_{hi}(\lambda t)} N_h(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \int_0^{-\lambda \bar{\tau}_i(t)} N_h(x) dx$$

Si se cumple que $\int_{-\infty}^0 N_h(x) dx = +\infty$, usando l'Hôpital se obtiene:

$$Z_{hi}^\infty(t) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} N_h(-\lambda \bar{\tau}_i(t)) \cdot (-\bar{\tau}_i(t)) = -\bar{N}_h \bar{\tau}_i(t)$$

Se cumple que $Z_{hi}^\infty(0) = 0$, por lo que la demostración de coercividad se concluye del mismo modo que en la Proposición 6.

En cuanto a la convexidad, si $N_h(\cdot)$ es creciente y no negativa, entonces $G_h(x) = \int_0^x N_h(z)dz$ es una función convexa y creciente por componentes. Como se demostró en la Proposición 5, las funciones $U_{hi}(t)$ son convexas, lo que implica que $G_h(U_{hi}(t))$ es convexa. De este modo, $B_h^i(b_h, t) = z_{hi} + G_h(U_{hi}(t)) - b_h$ es convexa, de donde se concluye el resultado. ■

Cabe señalar que la condición de crecimiento de las funciones $N_h(\cdot)$ es razonable, a mayor beneficio, mayor demanda.

Análogamente a los modelos anteriores, basta con ver las condiciones de primer orden asociadas a $\frac{\partial \Phi_3}{\partial t_a}$. Al igual que antes,

$$\forall a \in A, \quad \frac{\partial \Phi_3}{\partial t_a} = s_a^{-1}(t_a) + \sum_{\substack{h \in H \\ i \in I}} H_{hi} \cdot \frac{\partial b_h^i}{\partial t_a}(b_h, t),$$

pero donde ahora:

$$\frac{\partial B_h^i}{\partial t_a}(b_h, t) = N_h(U_{hi}(t)) \cdot \frac{\partial U_{hi}}{\partial t_a}(t)$$

El término $N_h(U_{hi}(t))$ corresponde a la cantidad de viajes generados por un hogar tipo h con propósito p , y depende del costo mínimo esperado por realizar un viaje con estas características en cada zona i , $U_{hi}(t)$.

Con argumentos idénticos a los desarrollados a partir de (52), se obtienen las condiciones de equilibrio en la red de transporte (25), de donde se obtiene que el óptimo mantiene las condiciones de equilibrio global del sistema integrado ST&US.

8. Algoritmo de resolución, simulación del modelo y extensiones

En esta sección se propondrá un algoritmo de resolución del modelo integrado de Uso de Suelo y Transporte para el caso en que tanto oferta como demanda inmobiliaria permanecen fijas. Posteriormente, se presenta una simulación del algoritmo que permite visualizar el efecto de la interacción entre los sistemas ST y US. Finalmente, se extiende el resultado a funciones de costo en arcos con capacidad de saturación máxima, es decir $s_a : [0, \bar{w}_a) \rightarrow [0, +\infty)$ y $\lim_{x \rightarrow \bar{w}_a} s_a(x) = +\infty$.

8.1. Algoritmo

Se considerará el modelo (29) con oferta fija y elección de destino considerando la disposición a pagar presentada en (48), que reescribiremos de la siguiente forma:

$$B_h^i(b_h, t) = Z_{hi}(t) - b_h$$

con $Z_{hi}(t) = z_{hi} - \sum_{p \in P} N_h^p \alpha_{hi}^p(t)$. Además, se considerará la desagregación según propósito p y tipo de hogar h de los flujos en los arcos de la red de transporte detallado en las observaciones del capítulo 6. De este modo, el problema (29) puede ser reformulado como sigue:

$$\min_{t \in \mathbb{R}^{|A|}} \left\{ \sum_{a \in A} \int_0^{t_a} s_a^{-1}(z) dz + \min_{b,r} \left[\sum_{i \in I} S_i r_i + \sum_{h \in H} H_h b_h + \frac{1}{\mu} \sum_{\substack{h \in H \\ i \in I}} e^{\mu(Z_{hi}(t) - b_h - r_i)} \right] \right\}. \quad (58)$$

Definiendo:

$$\Gamma(z) = \min_{b,r} \left[\sum_{i \in I} S_i r_i + \sum_{h \in H} H_h b_h + \frac{1}{\mu} \sum_{\substack{h \in H \\ i \in I}} e^{\mu(z_{hi} - b_h - r_i)} \right]$$

el problema (58) puede ser escrito de la siguiente forma:

$$\min_{t \in \mathbb{R}^{|A|}} \tilde{\Phi}(t) = \sum_{a \in A} \int_0^{t_a} s_a^{-1}(z) dz + \Gamma(Z(t)) \quad (59)$$

Bajo los supuestos $\sum_h H_h = \sum_i S_i$ y $b_1 = 0$, la función:

$$\Omega_z(b, r) \triangleq \sum_{i \in I} S_i r_i + \sum_{h \in H} H_h b_h + \frac{1}{\mu} \sum_{\substack{h \in H \\ i \in I}} e^{\mu(z_{hi} - b_h - r_i)}$$

es estrictamente convexa y coerciva, lo cual se deduce de la demostración de la proposición 2. De este modo, para cada z , existen vectores únicos $b(z)$ y $r(z)$ óptimos del problema:

$$\Gamma(z) = \min_{b,r} \Omega_z(b, r) \quad (60)$$

satisfaciendo:

$$b_h = \frac{1}{\mu} \ln \frac{1}{H_h} \sum_{i \in I} S_i \frac{e^{\mu z_{hi}}}{\sum_{g \in H} e^{\mu(z_{gi} - b_g)}} \triangleq F_h(z, b) \quad (61)$$

$$r_i = \frac{1}{\mu} \ln \frac{1}{S_i} \sum_{h \in H} e^{\mu(z_{hi} - b_h)} \triangleq G_i(z, b) \quad (62)$$

lo cual se deduce de las condiciones de primer orden del problema (60). Una iteración estándar de tipo punto fijo, ha probado empíricamente ser altamente eficiente para resolver la ecuación (61).

De este modo, el problema (59) puede ser reescrito como sigue:

$$\min_{t \in \mathbb{R}^{|A|}} \sum_{a \in A} \int_0^{t_a} s_a^{-1}(z) dz + \sum_{i \in I} S_i r_i(Z(t)) + \sum_{h \in H} H_h b_h(Z(t)) + \frac{1}{\mu} \sum_{\substack{h \in H \\ i \in I}} e^{\mu(Z_{hi}(t) - b_h(Z(t)) - r_i(Z(t)))}. \quad (63)$$

En el Teorema 1, cuya demostración se presenta en el Apéndice A, se demuestra la existencia y unicidad del mínimo de la función $\tilde{\Phi}$. Además, se prueba que el gradiente corresponde a $\frac{\partial \tilde{\Phi}(t)}{\partial t_a} = s_a^{-1}(t_a) - \tilde{w}_a(t) \quad \forall a \in A$, donde:

$$\tilde{w}_a(t) = \sum_{p \in P} \sum_{d \in Q_p^-} \sum_{h \in H} \sum_{i \in I} g_i^{dph}(t) \frac{\partial \tau_i^{dph}}{\partial t_a}(t) \quad (64)$$

$$g_i^{dph}(t) = H_{hi}(Z(t)) \cdot N_h^{dp}(t) \quad (65)$$

$$H_{hi}(Z(t)) = \exp(\mu(Z_{hi}(t) - b_h(Z(t)) - r_i(Z(t)))) \quad (66)$$

$$N_h^{dp}(t) = N_h^p \cdot P_{d/hpi}(t) \quad (67)$$

$$P_{d/hpi}(t) = \frac{\exp(-\mu_{hi}^p c_{hi}^{jp}(t))}{\sum_{k \in Q_p^-} \exp(-\mu_{hi}^p c_{hi}^{kp}(t))} \quad (68)$$

$$c_{hi}^{jp}(t) = \tau_i^{dph}(t) - \gamma_h^{dp} \quad (69)$$

Teorema 1. *Bajo (A_0) , $b_1 = 0$ y $\sum_{h \in H} H_h = \sum_{i \in I} S_i$, existe una única solución t^* para el problema de optimización:*

$$\min_{t \in \mathbb{R}^{|A|}} \tilde{\Phi}(t) = \sum_{a \in A} \int_0^{t_a} s_a^{-1}(z) dz + \Gamma(Z(t)) \quad (70)$$

donde

$$\Gamma(z) = \min_{b,r} \sum_{i \in I} S_i \cdot r_i + \sum_{h \in H} H_h \cdot b_h + \frac{1}{\mu} \sum_{h \in H} \sum_{i \in I} e^{\mu(z_{hi} - b_h - r_i)}$$

Además se satisface que $\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t_a}(t) = s_a^{-1}(t) - \tilde{w}_a(t)$ por lo cual el óptimo t^* cumple $s_a(\tilde{w}_a(t^*)) = t_a^*$.

El Teorema 1, nos permite asegurar la existencia y unicidad del óptimo t^* , el cual cumple las condiciones de equilibrio en el sistema de transporte (25). Del teorema también se deduce que la definición de $H_{hi}(t^*)$ otorgada en (66) satisface las condiciones (23) y (24), donde $b(Z(t^*))$ y $r(Z(t^*))$ son los vectores óptimos asociados a $\Gamma(Z(t^*))$. Debido a esto, se concluye que el único óptimo del problema (59) cumple las condiciones de equilibrio global ST&US.

Debido a que $\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t_a} = s_a^{-1}(t_a) - \tilde{w}_a(t)$, un algoritmo tipo método del gradiente necesita calcular $\tilde{w}_a(t)$ para obtener la dirección de descenso, en la búsqueda del óptimo t^* del problema (59). Para ello, dado un t , se propone:

$$PF(t) \left\{ \begin{array}{l} -\text{Iterar } \tau_i^{dph,n+1} = \varphi_i^{dph}(t_a + \tau_{j_a}^{dph,n}; a \in A_i^+) \text{ para estimar } \tau_i^{dph} = \tau_i^{dph}(t) \\ -\text{Calcular } \frac{\partial \varphi_i^{dph}}{\partial t_a}(z^{dph}) \text{ con } z_a^{dph} = t_a + \tau_{j_a}^{dph} \text{ y construir las matrices} \\ \quad P^{dph} \text{ y } Q^{dph} \text{ de probabilidades de elección de arcos de la red (MTE)} \\ -\text{Calcular } c_{hi}^{dp}(t), \alpha_{hi}^p(t) \text{ y } Z_{hi}(t). \\ -\text{Iterar } b_h^{k+1} = F_h(Z(t), b^k) \text{ para estimar } b_h = b_h(t) \text{ y } r_i(t) = G_i(Z(t), b(t)) \\ -\text{Calcular } H_{hi} \text{ y } N_{hi}^{dp} \text{ según (66) y (67) para obtener } g_i^{dph} = H_{hi} \cdot N_{hi}^{dp} \\ -\text{Calcular } x^{dph} = [I - (P^{dph})']^{-1} g^{dph} \text{ y } v^{dph} = (Q^{dph})' x^{dph} \\ -\text{Agregar } \tilde{w} = \sum_{p \in P} \sum_{d \in Q_p^-} \sum_{h \in H} v^{dph} \end{array} \right.$$

Se demuestra en Baillon y Cominetti (2004), que bajo las hipótesis (A_0) , la primera iteración de punto fijo para encontrar $\tau_i^{dph}(t)$ converge. La segunda iteración de punto fijo, proveniente de la ecuación (61), también converge, lo cual es demostrado por Macgill (1977).

La actualización del vector de tiempo en arcos t , al igual que en MTE, se realiza en función del vector w a través de la relación $s_a(w_a) = t_a$. Para la actualización del vector w , se define la función objetivo $\Psi(w) = \tilde{\Phi}(s(w))$, la cual, en virtud del teorema 1, satisface:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial w_a} = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t_a}(s(w)) s'_a(w_a) = [s_a^{-1}(s_a(w_a)) - \tilde{w}_a(s(w))] s'_a(w_a) = [w_a - \tilde{w}_a(s(w))] s'_a(w_a).$$

De este modo, para la actualización del vector w , se utiliza una variante del método del gradiente para la función Ψ , llamada método de promedios sucesivos (MSA):

$$(MSA) \quad w_a^{k+1} = w_a^k - \alpha_k [w_a^k - \tilde{w}_a^k]$$

donde $\tilde{w}_a^k = \tilde{w}_a(s(w^k))$. De forma equivalente, MSA puede ser escrito de la siguiente forma:

$$w^{k+1} = w^k - \alpha_k \cdot D(w^k)^{-1} \nabla \Psi(w^k)$$

donde $D(w) = \text{diag}[s'_a(w_a); a \in A]$. Así, MSA puede ser interpretado como un método de gradiente con métrica variable para la función objetivo $\Psi(w)$.

En síntesis, el algoritmo propuesto es, dado w^k :

- Calcular $t^k = s(w^k)$
- Calcular $\tilde{w}(t^k)$ a través de $PF(t^k)$
- Calcular w^{k+1} usando MSA

En base a lo anteriormente demostrado, el teorema 5 de Baillon y Cominetti (2004) asegura que el método converge al equilibrio buscado, bajo las siguientes condiciones sobre la sucesión α_k :

$$\sum_{k \geq 1} \alpha_k = +\infty \quad , \quad \sum_{k \geq 1} \alpha_k^2 < +\infty.$$

8.2. Extensión a saturación máxima en arcos de transporte

Hasta ahora, se ha supuesto que las funciones $s_a(\cdot)$ están definidas en $[0, +\infty)$. Como a menudo los arcos poseen una capacidad de saturación máxima, es útil extender el modelo considerando funciones estrictamente crecientes $s_a : [0, \bar{w}_a) \rightarrow [0, \infty)$. La capacidad de saturación \bar{w}_a se supone estrictamente positiva y puede ser infinito para aquellos arcos no sujetos a tal saturación. En el teorema 2 se presentan las condiciones suficientes para en este caso se mantengan los resultados del teorema 1. La condición principal es que exista una configuración de flujos de hogares por los arcos de localización y flujos por arcos de la red de transporte, consistentes con la generación de viajes de cada tipo de hogar y con la conservación de flujos en la red de transporte, que no consiga saturar ningún arco de esta última. Esta existencia se traduce en la resolución de un sistema lineal de ecuaciones, de resolución computacional eficiente.

Teorema 2. *Supongamos que se cumple (A_0) con $s_a : [0, \bar{w}_a) \rightarrow [0, +\infty)$ tal que $\lim_{w_a \rightarrow \bar{w}_a} s_a(w_a) = +\infty$, $b_1 = 0$ y $\sum_{h \in H} H_h = \sum_{i \in I} S_i$. Además, supongamos que existe un vector $(\hat{H}, \hat{g}, \hat{v}, \hat{w})$, con $\hat{w}_a < \bar{w}_a \quad \forall a \in A$ y satisfaciendo para cada $t \neq 0$:*

$$\widehat{g}_{hi}^{pd} + \sum_{a \in A_i^-} \widehat{v}_{ha}^{pd} = \sum_{a \in A_i^+} \widehat{v}_{ha}^{pd} \quad \forall d \in D, i \neq d \quad (71)$$

$$\sum_{h \in H} \sum_{p \in P} \sum_{d \in Q_p^-} \widehat{v}_{ha}^{pd} = \widehat{w}_a \quad \forall a \in A \quad (72)$$

$$\sum_{d \in Q_p^-} \widehat{g}_{hi}^{pd} = \widehat{H}_{hi} N_h^p \quad (73)$$

$$\sum_{i \in I} \widehat{H}_{hi} = H_h \quad \forall h \in H \quad (74)$$

$$\sum_{h \in H} \widehat{H}_{hi} = S_i \quad \forall i \in I \quad (75)$$

$$\widehat{H}_{hi} \geq 0 \quad (76)$$

Luego, las conclusiones del Teorema 1 se mantienen válidas.

Demostración. Basta ver que la coercividad de la función $\widetilde{\Phi}(t)$ se mantiene en este caso. La función de recesión de $\sum_{a \in A} \int_0^{t_a} s_a^{-1}(z) dz$ corresponde a $\sum_{a \in A} \bar{w}_a t_a$ si $t \geq 0$ y $+\infty$ en otro caso. De la demostración del teorema 1, se sabe que:

$$(\Gamma \circ Z)^\infty(t) = \sum_{h,i} H_{hi}^* Z_{hi}^\infty(t)$$

donde H_{hi}^* es óptimo del problema (D_2) . De la demostración de la proposición 4 se sabe que $Z_{hi}^\infty(t) = -\sum_{p \in P} N_h^p \cdot \bar{\tau}_i^p(t)$, por lo cual:

$$\widetilde{\Phi}^\infty(t) = \begin{cases} \sum_{a \in A} \bar{w}_a t_a - \sum_{\substack{h \in H \\ i \in I}} \sum_{p \in P} H_{hi}^* N_h^p \cdot \bar{\tau}_i^p(t) & \text{si } t \geq 0 \\ +\infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Debido a las condiciones (74), (75) y (76), el vector \widehat{H} es factible para el problema (D_2) , por lo que $\forall t \geq 0$ se cumple que:

$$\sum_{h,i} \sum_{p \in P} H_{hi}^* N_h^p \cdot \bar{\tau}_i^p(t) \leq \sum_{h,i} \sum_{p \in P} \widehat{H}_{hi} N_h^p \cdot \bar{\tau}_i^p(t)$$

debido a la condición (76) y a que $\bar{\tau}_i^p(t) \geq 0$ para $t \geq 0$. De este modo, se obtiene que $\forall t \geq 0$:

$$\widetilde{\Phi}^\infty(t) \geq \sum_{a \in A} \bar{w}_a t_a - \sum_{\substack{h \in H \\ i \in I}} \sum_{p \in P} \widehat{H}_{hi} N_h^p \cdot \bar{\tau}_i^p(t) \quad (78)$$

Para demostrar que $\tilde{\Phi}^\infty(t) > 0$, tomemos $h \in H, p \in P, d \in Q_p^-$ cualquiera. Multiplicando la desigualdad:

$$\bar{\tau}_{i_a}^d(t) \leq t_a + \bar{\tau}_{j_a}^d(t)$$

por \hat{v}_{ha}^{pd} y sumando sobre todos los arcos $a \notin A_d^+$ de (71) se obtiene que:

$$\sum_{i \neq d} \hat{g}_{hi}^{pd}(t) \bar{\tau}_i^d(t) \leq \sum_{a \in A} t_a \hat{v}_{ha}^{pd}$$

Luego sumando sobre $d \in Q_p^-$ se obtiene:

$$\sum_{d \in Q_p^-} \sum_{i \neq d} \bar{\tau}_i^d(t) \hat{g}_{hi}^{pd} \leq \sum_{a \in A} t_a \sum_{d \in Q_p^-} \hat{v}_{ha}^{pd} = \sum_{a \in A} t_a \hat{v}_{ha}^p$$

donde $\hat{v}_{ha}^p = \sum_{d \in Q_p^-} \hat{v}_{ha}^{pd}$. Esto equivale a escribir:

$$\sum_{i \in N} \sum_{\substack{d \in Q_p^- \\ i \neq d}} \bar{\tau}_i^d(t) \hat{g}_{hi}^{pd} \leq \sum_{a \in A} t_a \hat{v}_{ha}^p \quad (79)$$

Como $\bar{\tau}_i^p(t) = \min_{d \in Q_p^-} (\bar{\tau}_i^d(t)) \leq \bar{\tau}_i^d(t) \quad \forall d \in Q_p^-$, de (79) se obtiene que:

$$\sum_{i \in N} \bar{\tau}_i^p(t) \sum_{\substack{d \in Q_p^- \\ d \neq i}} \hat{g}_{hi}^{pd} = \sum_{i \in N} \bar{\tau}_i^p(t) \sum_{d \in Q_p^-} \hat{g}_{hi}^{pd} \leq \sum_{a \in A} t_a \hat{v}_{ha}^p$$

La condición (73) implica que:

$$\sum_{i \in N} \bar{\tau}_i^p(t) \hat{H}_{hi} N_h^p \leq \sum_{a \in A} t_a \hat{v}_{ha}^p \quad \forall h \in H, p \in P$$

Luego sumando en h y en p , se obtiene:

$$\sum_{h \in H} \sum_{p \in P} \sum_{i \in N} \hat{H}_{hi} N_h^p \bar{\tau}_i^p(t) \leq \sum_{a \in A} t_a \left(\sum_{h \in H} \sum_{p \in P} \hat{v}_{ha}^p \right) = \sum_{a \in A} t_a \hat{w}_a < \sum_{a \in A} t_a \bar{w}_a$$

Por lo tanto, de (78) se deduce que $\tilde{\Phi}^\infty(t) > 0$, lo que concluye el resultado. \blacksquare

8.3. Simulaciones

En las simulaciones del algoritmo propuesto anteriormente se considera el modelo de oferta y demanda inmobiliaria fija con elección de destino, es decir el problema (29) con función de disposición a pagar (48). Además se considera el modelo logit en la elección

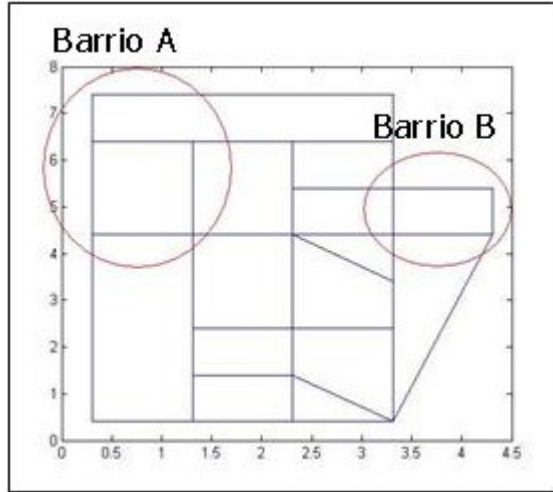


Figura 5: Red de Siouxfalls

de arcos en la red de transporte, con parámetro de escala independiente del nodo, tipo de hogar, destino o propósito. Es decir, $\tau_i^{jph}(t) = -\ln \sum_{a \in A_i^+} \exp(-\beta(t_a + \tau_{ja}^{jph})) / \beta$. La implementación del método en Matlab se realizó sobre la red de Siouxfalls, red pequeña de 24 nodos y 76 arcos con funciones de tiempos de viaje $s_a(w_a) = t_a^0 [1 + b_a (\frac{w_a}{c_a})^{p_a}]$ las cuales satisfacen (A_0) y no tienen capacidad máxima de saturación. Por otra parte, se consideraron 5 categorías de 20 hogares cada una, 3 propósitos concentrados en 5 nodos de la red de transporte, demanda y oferta inelásticas y oferta repartida homogéneamente en todos los nodos de la red. El método alcanzó una precisión de $\|\tilde{w}^k - w^k\| \leq 10^{-9}$ en 220 iteraciones y 52.45[s] en un procesador de 3.2GHz.

Además, se efectuaron una secuencia de simulaciones en la red de Siouxfalls para verificar la influencia de la congestión en la localización y viceversa. Se planteó una situación inicial en la que las categorías de hogares 1 y 2 tienen una inclinación mayor por el “barrio A”, 5 nodos de la red donde se concentran los 3 propósitos, y el resto de los hogares mayor inclinación por otros 4 nodos de la red, denominados “barrio B”. Esta inclinación se manifiesta en el valor de las constantes z_{hi} exógenas al modelo y que representan la percepción de los atributos de la zona, sin considerar el transporte. También se supone que las categorías 1 y 2 generan un 50% menos viajes que el resto de las categorías. En la Figura 5 se observa la red de Siouxfalls, y los barrios A y B.

Posteriormente se simula el crecimiento de la población y de la generación de viajes en cada año, a través de una ponderación de la cantidad de hogares en cada categoría por un factor 1.2 y la ponderación de la tasa de generación de viajes por propósito de cada categoría por un factor 1.1. Dicho de otro modo, para cada año $n = 0 \dots 10$, se considera:

$$H_h^n = H_h^0 \cdot (1,2)^n \quad , \quad N_h^{p,n} = N_h^{p,0} \cdot (1,1)^n$$

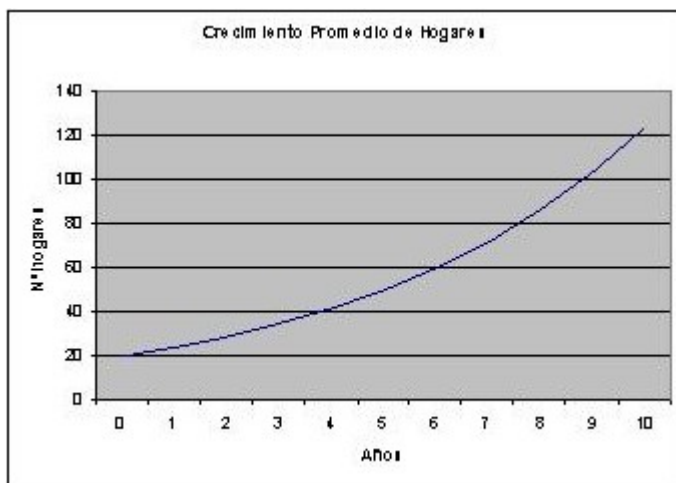


Figura 6: Crecimiento de Hogares

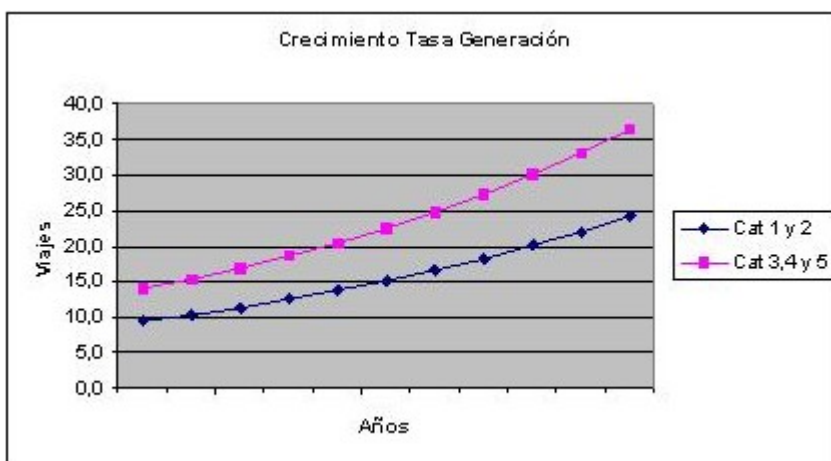


Figura 7: Crecimiento de Tasa de Generación

con $H_h^0 = 20 \quad \forall h = 1 \dots 5$ y

$$N^0 = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 6 \\ 10 & 12 & 6 \\ 15 & 18 & 9 \\ 15 & 18 & 9 \\ 15 & 18 & 9 \end{pmatrix}$$

donde $N_{ij}^0 = N_i^{j,0}$ y los propósitos son 1=“trabajo”, 2=“estudio” y 3=“otros”. El resto de la información exógena se mantiene constante (*ceteris paribus*). El crecimiento de la cantidad de hogares y de su tasa de generación se puede visualizar en las Figuras 6 y 7 respectivamente.

Cada año n se ejecuta el algoritmo para buscar el equilibrio correspondiente considerando cantidad de hogares H_h^n y tasa de generación de viajes $N_h^{p,n}$. El objetivo de estos incrementos es poder visualizar el efecto que tiene el aumento de la población y generación de viajes en la congestión de los arcos de la red y cómo esta congestión afecta a los distintos tipos de hogares en su localización. En la Figura 8 se aprecia la influencia del crecimiento de la población y de la generación de viajes en la congestión de los arcos.

Este crecimiento exponencial en la congestión de los arcos no afecta de la misma manera a las distintas categorías. En efecto, el aumento considerable en los tiempos en los arcos tiene relación directa con el aumento de los tiempos mínimos esperados entre cada par origen-destino $\tau_i^d(t)$ y por lo tanto con el aumento en el mínimo tiempo esperado en alcanzar cada propósito α_{hi}^p . Debido a que la función de disposición a pagar es de la forma:

$$B_h^i(b_h, t) = b_h + z_{hi} - \sum_{p \in P} N_h^p \alpha_{hi}^p$$

y las categorías 3, 4 y 5 generan 50% más viajes que las categorías 1 y 2, es decir:

$$N_h^{p,n} = 1,5 \cdot N_g^{p,n} \quad \forall p, n; \quad h = 3, 4, 5; \quad g = 1, 2,$$

la influencia del transporte en las categorías 3, 4 y 5 va siendo cada vez mayor en la disposición a pagar, lo que hace disminuir considerablemente su postura en los lugares alejados del barrio A, donde se encuentran todos los propósitos de los viajes. Debido a esto, las categorías 1 y 2 resultan triunfadoras en el remate que se produce en estos lugares, produciéndose un éxodo de hogares de categorías 1 y 2 desde el barrio A a los otros nodos de la red. Al mismo tiempo, las otras categorías ocupan el excedente de oferta generado en el barrio A en el proceso, logrando localizarse donde se encuentran los propósitos y anulando, de esta manera, la influencia de la congestión. En la Figura 9 y 10 se observa el cambio en la localización de los agentes producto de la congestión.

Por otra parte, la congestión hace disminuir la postura de todos los agentes, dado que a cada tipo de hogar le influye negativamente de una u otra forma. Como la renta tiene la forma:

$$r_i = \frac{1}{\mu} \ln \frac{1}{S_i} \sum_{h \in H} e^{\mu B_h^i(b_h, t)}$$

la renta se ve afectada negativamente por la congestión. En la Figura 11, se observa este efecto negativo de la congestión en las rentas de todos los barrios.

De esta manera el algoritmo refleja la interacción mutua entre el sistema de transporte y el uso del suelo.

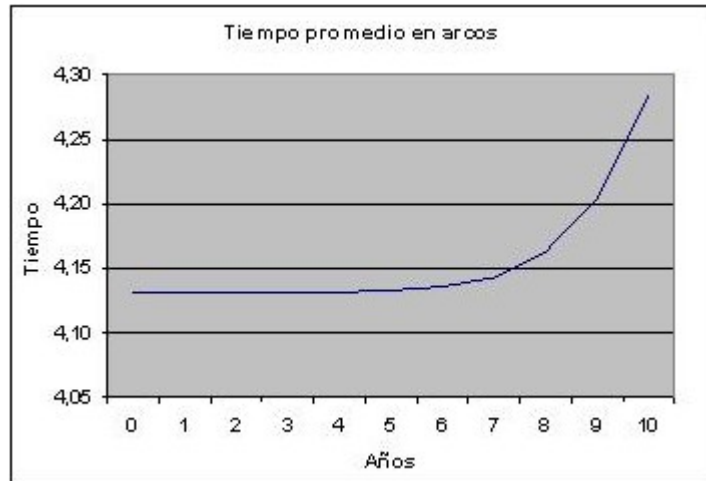


Figura 8: Aumento en la Congestión

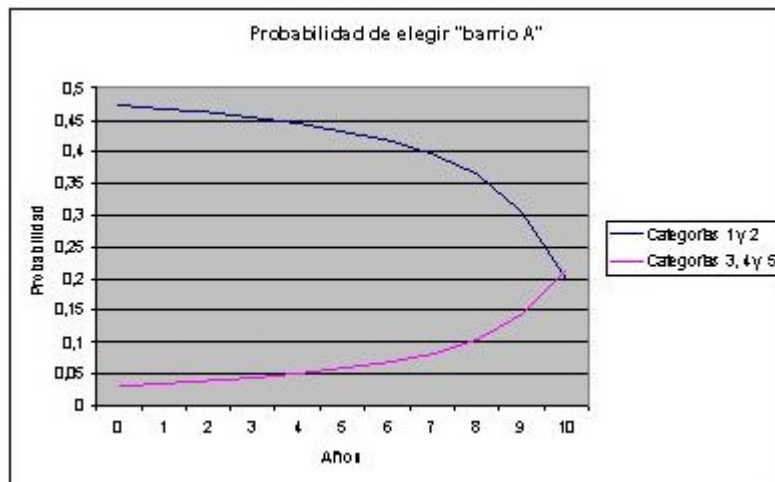


Figura 9: Cambio en la elección del barrio A

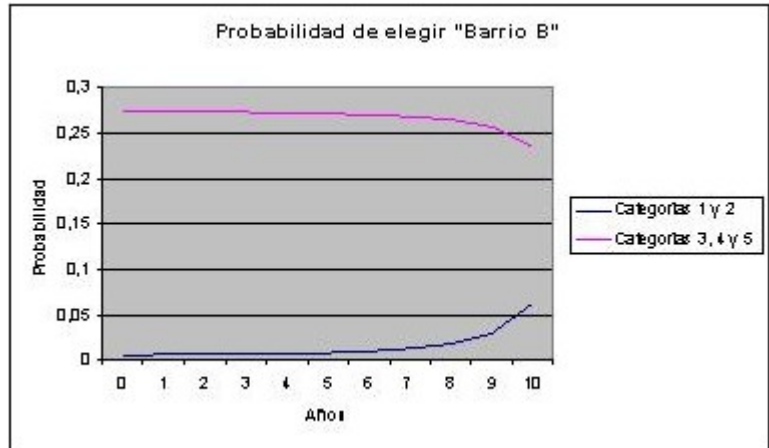


Figura 10: Cambio en la elección del barrio B

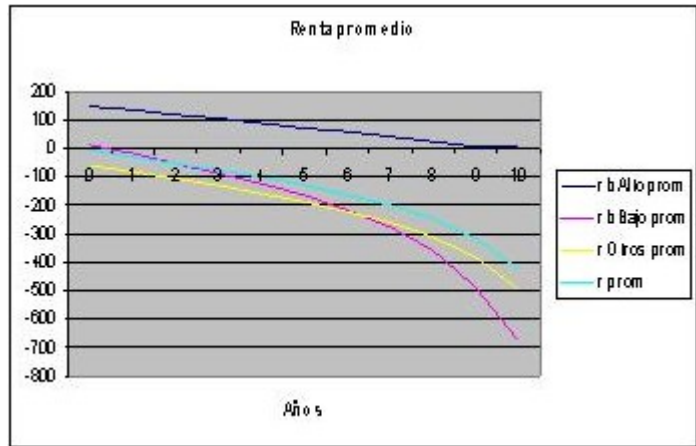


Figura 11: Cambio en las rentas

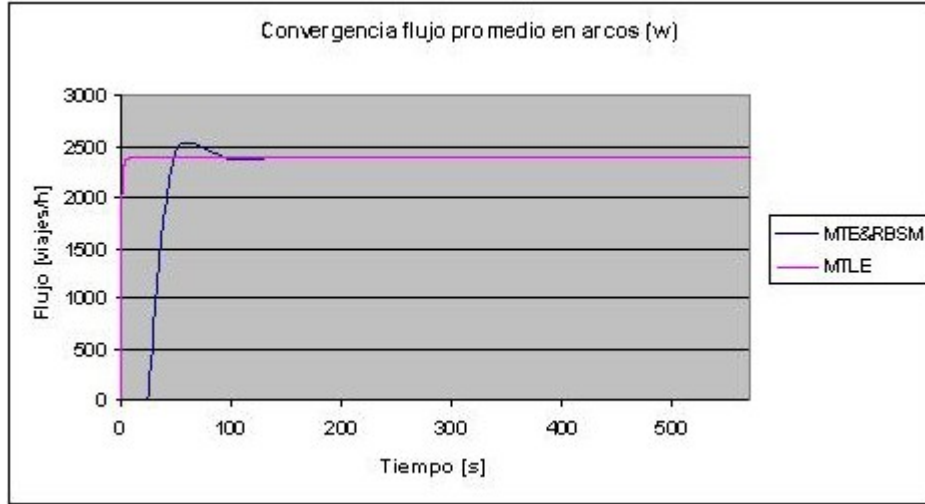


Figura 12: Convergencia Flujo Promedio en Arcos

Por otra parte, se realizó una simulación ocupando una heurística tipo bi-nivel: MTE resuelve la asignación de la red de transporte con la información recibida de RB&SM en el mercado del uso de suelo. Esta información corresponde a la matriz de distribución de viajes (g_i^{dph}), la cual se mantiene fija mientras MTE calcula el equilibrio en el sistema de transporte a través del algoritmo MSA propuesto en Baillon y Cominetti (2004). Por su parte, RB&SM obtiene esta información a partir del nivel de servicio de la red de transporte que entrega MTE, representado a través de los tiempos mínimos esperados entre cada par origen-destino (τ_i^{dph}) y la probabilidad de elección de destino ($P_{d/hip}$). Tal heurística se denominó MTE&RBSM. En las Figuras 12 y 13 se observa el comportamiento del flujo promedio en los arcos ($\bar{w} = \frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} w_a$) en cada iteración hasta llegar al equilibrio, comparado con los resultados del algoritmo propuesto en este trabajo, denominado MTLE.

En la Figura 12 se puede ver la diferencia entre los tiempos de ejecución de ambos algoritmos: mientras el algoritmo MTLE alcanza rápidamente el flujo promedio de equilibrio, el algoritmo bi-nivel se demora en estabilizarse en torno a éste. De hecho, los flujos obtenidos en las iteraciones a partir de los 80 [s] desde el inicio de la iteración empiezan a oscilar en torno al flujo de equilibrio, lo cual se puede visualizar mejor en la Figura 13. Por otra parte, el algoritmo MTLE tuvo un tiempo promedio de iteración de 0,24 [s], mientras la heurística MTE&RBSM tomó un tiempo promedio de 49,18 [s] en un procesador de 3,2 GHz.

De este modo se prueba la superioridad en eficiencia del algoritmo propuesto frente a la heurística bi-nivel. Además, pese a que ésta converge finalmente al equilibrio en la simulación realizada, no se asegura la convergencia en todos los casos.

9. Conclusiones y Trabajo Futuro

El modelo final presentado permite la integración de los sistemas de transporte y uso de suelo a través de un problema de optimización, definido sobre una red que incluye la red de transporte y una sub-red con arcos representando elecciones asociadas a la localización de los agentes. Estas elecciones se llevan a cabo considerando el uso de suelo como un mercado de remate al mejor postor, lo cual se manifiesta a través de las condiciones de primer orden asociadas al óptimo del problema. Además, estas últimas mantienen las condiciones de equilibrio en la red asociada al sistema de transporte, por lo que el óptimo del problema de optimización corresponde al equilibrio global de los sistemas de transporte y uso de suelo.

El modelo, en su versión más general, permite estudiar la interacción ST&US con oferta y demanda variables, generación, elección de propósito y elección de destino de los viajes. En todas sus versiones el modelo garantiza la existencia y unicidad de la solución, debido a que, al igual que los problemas de optimización en redes de transporte, la función objetivo del problema de optimización es estrictamente convexa y coerciva bajo supuestos razonables. Este resultado supera las limitaciones que plantean los modelos anteriores en que la unicidad no está garantizada. Por otra parte, este modelo tiene ciertas limitaciones, como el supuesto de que no hay externalidades de localización ni economías de aglomeración endógenas al equilibrio, y que la red de transporte es para modos privados. Sin embargo, las externalidades pueden ser tratadas con un desfase temporal y, por otra parte, el transporte público puede ser incluido con algunas limitaciones como una subred de transporte paralela a la de transporte privado.

Como trabajo futuro, es interesante aprovechar la flexibilidad del modelo propuesto para incluir en mayor detalle la toma de decisiones en la oferta inmobiliaria, trabajo desarrollado en Martínez y Roy (2004), pero que no considera la integración con el sistema de transporte. También es interesante intentar incluir de manera más realista las decisiones tomadas en el transporte público, considerando los tiempos de espera en paraderos, e integrar en el modelo la elección de modo. Por otra parte, también es de interés incluir regulaciones en la oferta inmobiliaria como también permitir exceso de oferta y demanda en el modelo, para permitir desigualdades en las restricciones $\sum_h H_{hi} = S_i$ y $\sum_i H_{hi} = H_h$. Del mismo modo es interesante incluir la restricción de ingreso en las decisiones de localización, ya que el modelo presentado manifiesta la percepción de los hogares sobre las zonas a través de su disposición a pagar, la cual no se encuentra acotada. Tampoco se incluye la restricción de tiempo en el modelo, al no estar acotadas las funciones de mínimo tiempo esperado de viajes, por lo cual también es un desafío integrar tal restricción. Finalmente es un desafío permitir modelar economías de escala en la producción inmobiliaria y externalidades sin desfase temporal, pero se intuye que, para este objetivo, el enfoque de formulación variacional debe ser modificado.

10. Referencias

ALONSO, W. (1965) *Location and Land Use: Towards a General Theory of Land Rent* (Cambridge, Massachusetts, U.S.A.:Harvard University Press).

ANAS, A. (1981) Discrete Choice Theory, Information Theory and the Multinomial Logit and Gravity Models, *Transportation Research*, 17B, 13-23.

BAILLON, J-B. y R. COMINETTI (2004) Markovian Traffic Equilibrium, *Mathematical Programming* (en imprenta)

BOYCE, D. y L.-G. MATTSSON (1999) Models residential location choice in relation to housing location and road tolls on congested urban highway networks, *Transportation Research*, 33B, 581-591

CHANG, J S. (2005) Models of the relationship between transport and land-use: a review, *Transport Review* (en imprenta)

CHANG, J.S. y R. MACKETT (2005) A bi-level model of the relationship between transport and residential location, *Transportation Research B*, 40, 123-146.

DE CEA, J. y J.E. FERNANDEZ, (1993) Transit Assignment for Congested Public Transport Systems: An Equilibrium Model. *Transportation Science*, 27(2), 133-147

ELICKSON, B., (1981) An Alternative Test of the Hedonic Theory of Housing Markets. *Journal of Urban Economics*, 9, 56-79

FANG S.-C., RAJASEKERA J.R. y TSAO H.-S.J. (1997) *Entropy Optimization and Mathematical Programming* (Londres, Inglaterra, Kluwer Academic Publishers)

MACGILL S. M. (1977) Theoretical properties of biproportional matrix adjustments *Environment and Planning A*, 9, 687-701

MARTINEZ, F. (1992) The Bid-Choice land use model: an integrated economic framework. *Environment and Planning A* 15, 871-885.

MARTINEZ, F. (1995) Access: The Transport-Land Use Economic Link. *Transportation Research*, 29, 457-470

MARTINEZ, F. y P. DONOSO (2001) Modeling Land Use Planning Effects: Zone Regulations and Subsidies. *Travel Behaviour Research*, The Leading Edge. D. Hensher (ed.), Pergamon-Elsevier, 647-658.

MARTINEZ, F. y R. HENRIQUEZ (2003) A Stochastic Land Use Equilibrium Model, paper presented at the 10th International Conference on Travel Behaviour Research, Lucerne, August 2003.

MARTINEZ, F. y J. ROY (2004) A Model of Residential Supply. *Annals of Regional Science*, 38 (3), 531-550

NAGURNEY, A. y J. DONG (2002a) A multiclass, multicriteria traffic network equilibrium model with elastic demand. *Transportation Research* , 36B, 445-469.

NAGURNEY, A. y J. DONG (2002b) Urban Location and Transportation in the Information Age: A Multiclass, Multicriteria Network Equilibrium Perspective. *Environment and Planning*, 29B, 53-74.

ORTUZAR, J. de D. y L.G. WILLUMSEN (1994) *Modelling Transport*. Segunda Edición, John Wiley Sons, Chichester.

ROY, J. (2004) *Spatial Interaction Modelling*. A Regional Science Context. Springer-Verlag, Berlin.

SHEFFI, Y., (1985) *Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods* (New Jersey, U.S.A.:Prentice-Hall)

WILSON, A. (1970) *Entropy in Urban and Regional Modelling*. London UK, Pion Ltd.

11. Apendice

A. Demostración Teorema 1

Teorema 3. *Bajo (A_0) , $b_1 = 0$ y $\sum_{h \in H} H_h = \sum_{i \in I} S_i$, existe una única solución t^* para el problema de optimización:*

$$\min_{t \in \mathbb{R}^{|A|}} \tilde{\Phi}(t) = \sum_{a \in A} \int_0^{t_a} s_a^{-1}(z) dz + \Gamma(Z(t)) \quad (80)$$

donde

$$\Gamma(z) = \min_{b,r} \sum_{i \in I} S_i \cdot r_i + \sum_{h \in H} H_h \cdot b_h + \frac{1}{\mu} \sum_{h \in H} \sum_{i \in I} e^{\mu(z_{hi} - b_h - r_i)}$$

Además se satisface que $\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t_a}(t) = s_a^{-1}(t) - \tilde{w}_a(t)$ por lo cual el óptimo t^* cumple $s_a(\tilde{w}_a(t^*)) = t_a^*$.

Demostración. Basta demostrar que $\Phi(t)$ es estrictamente convexa y coerciva. Para la coercividad, se demuestra análogamente a Baillon y Cominetti (2004) que bajo (A_0) , las funciones $\tau_i^{jph}(t)$ están bien definidas y son cóncavas, por lo que se deduce, al igual que en la demostración de la Proposición 4, que las funciones $Z_{hi}(t)$ son convexas. Por otro lado, la función:

$$\Omega(b, r, z) := \sum_{i \in I} S_i \cdot r_i + \sum_{h \in H} H_h \cdot b_h + \frac{1}{\mu} \sum_{h \in H} \sum_{i \in I} e^{\mu(z_{hi} - b_h - r_i)}$$

es estrictamente convexa por lo que:

$$\Gamma(z) = \min_{b,r} \Omega(b, r, z)$$

es una función convexa. Además, $\Gamma(z)$ es creciente por componentes, dado que si para todo h, i se tiene $z_{hi}^1 \leq z_{hi}^2$ entonces $\Omega(b, r, z^1) \leq \Omega(b, r, z^2)$ para todo b, r , de donde $\Gamma(z^1) \leq \Gamma(z^2)$. Como $\Gamma(z)$ es convexa y creciente por componentes y $Z_{hi}(t)$ es convexa para cada h, i , se concluye que $\Gamma(Z(t))$ es convexa. Como además en (A_0) se pide que las funciones $s_a(\cdot)$ sean estrictamente crecientes, la función $\varphi(t) = \int_0^{t_a} s_a^{-1}(z) dz$ es estrictamente convexa, por lo que $\tilde{\Phi}(t)$ es estrictamente convexa.

Para la coercividad de $\tilde{\Phi}$, es necesario calcular:

$$\begin{aligned} (\Gamma \circ Z)^\infty(t) &= \Gamma^\infty(Z_{hi}^\infty(t); h, i) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \min_{b,r} \sum_{i \in I} S_i \frac{r_i}{\lambda} + \sum_{h \in H} H_h \frac{b_h}{\lambda} + \frac{1}{\lambda \mu} \sum_{h,i} e^{\lambda \mu (Z_{hi}^\infty(t) - \frac{b_h}{\lambda} - \frac{r_i}{\lambda})} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \min_{b,r} \sum_{i \in I} S_i r_i + \sum_{h \in H} H_h b_h + \frac{1}{\lambda \mu} \sum_{h,i} e^{\lambda \mu (Z_{hi}^\infty(t) - b_h - r_i)} = \min_{b_h + r_i \geq Z_{hi}^\infty} \sum_{i \in I} S_i r_i + \sum_{h \in H} H_h b_h \end{aligned}$$

El dual del problema:

$$(P_2) \quad \min_{b_h + r_i \geq Z_{hi}^\infty} \sum_{i \in I} S_i r_i + \sum_{h \in H} H_h b_h$$

corresponde a:

$$(D_2) \quad \min_{H_{hi}} - \sum_{h,i} H_{hi} Z_{hi}^\infty(t) \quad (81)$$

s.a.

$$\sum_{i \in I} H_{hi} = H_h \quad (82)$$

$$\sum_{h \in H} H_{hi} = S_i \quad (83)$$

$$H_{hi} \geq 0 \quad (84)$$

con la función de perturbación:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}((b, r), H) &= \sup_{G \geq 0} \sum_{i \in I} S_i r_i + \sum_{h \in H} H_h b_h + \sum_{h,i} G_{hi} (H_{hi} + Z_{hi}^\infty(t) - b_h - r_i) \\ &= \begin{cases} +\infty & \text{si } \exists h, i \text{ tq } H_{hi} + Z_{hi}^\infty(t) - b_h - r_i > 0 \\ \sum_{i \in I} S_i r_i + \sum_{h \in H} H_h b_h & \text{si } \forall h, i \quad H_{hi} + Z_{hi}^\infty(t) - b_h - r_i \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

El problema (D_2) tiene solución, dado que el conjunto factible es compacto y la función objetivo es continua. Para que no existan saltos de dualidad, es necesario verificar la condición de SLATER: $\exists(b, r)$ tq $Z_{hi}^\infty(t) < b_h + r_i \quad \forall h, i$, lo cual se cumple trivialmente tomando vectores b y r adecuados. De este modo, se cumple que:

$$(\Gamma \circ Z)^\infty(t) = \min_{b_h + r_i \geq Z_{hi}^\infty} \sum_{h \in H} H_h b_h + \sum_{i \in I} S_i r_i = \max_{H_{hi} \in \Delta} \sum_{h,i} H_{hi} Z_{hi}^\infty(t) < +\infty$$

donde Δ es el conjunto factible determinado por las restricciones del problema (D_2) .

Así, para $t \neq 0$:

$$\tilde{\Phi}^\infty(t) = \varphi^\infty(t) + (\Gamma \circ Z)^\infty(t)$$

Bajo las hipótesis (A_0) , se tiene que $\varphi^\infty(t) = +\infty$, por lo que se concluye que $\tilde{\Phi}^\infty(t) = +\infty > 0$. De este modo se concluye que $\tilde{\Phi}$ es estrictamente convexa y coerciva, por lo tanto el problema (80) tiene solución única.

Calculemos el gradiente de $\tilde{\Phi}(t)$:

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}(t)}{\partial t_a} = s_a^{-1}(t_a) + \sum_{h \in H} \sum_{i \in I} \frac{\partial \Gamma}{\partial Z_{hi}}(Z(t)) \cdot \frac{\partial Z_{hi}}{\partial t_a}(t)$$

Como $\Omega(b, r, Z)$ es estrictamente convexa y coerciva, existen únicos vectores $b(Z)$ y $r(Z)$ tales que:

$$\Gamma(Z) = \Omega(b(Z), r(Z), Z) = \sum_{j \in I} S_j r_j(Z) + \sum_{g \in H} H_g b_g(Z) + \frac{1}{\mu} \sum_{g \in H} \sum_{j \in I} e^{\mu(Z_{gj} - b_g(Z) - r_j(Z))}$$

De este modo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial Z_{hi}} &= \sum_{j \in I} S_j \frac{\partial r_j}{\partial Z_{hi}} + \sum_{g \in H} H_g \frac{\partial b_g}{\partial Z_{hi}} + \sum_{g \in H} \sum_{j \in I} e^{\mu(Z_{gj} - b_g - r_j)} (\delta_{(h,i),(g,j)} - \frac{\partial b_g}{\partial Z_{hi}} - \frac{\partial r_j}{\partial Z_{hi}}) \\ &= \sum_{j \in I} S_j \frac{\partial r_j}{\partial Z_{hi}} + \sum_{g \in H} H_g \frac{\partial b_g}{\partial Z_{hi}} + H_{hi}(Z(t)) - \sum_{g \in H} \sum_{j \in I} H_{gj}(Z(t)) \frac{\partial b_g}{\partial Z_{hi}} - \sum_{g \in H} \sum_{j \in I} H_{gj}(Z(t)) \frac{\partial r_j}{\partial Z_{hi}} \\ &= \sum_{j \in I} S_j \frac{\partial r_j}{\partial Z_{hi}} + \sum_{g \in H} H_g \frac{\partial b_g}{\partial Z_{hi}} + H_{hi}(Z(t)) - \sum_{g \in H} \frac{\partial b_g}{\partial Z_{hi}} \sum_{j \in I} H_{gj}(Z(t)) - \sum_{j \in I} \frac{\partial r_j}{\partial Z_{hi}} \sum_{g \in H} H_{gj}(Z(t)) \end{aligned}$$

donde $H_{gj}(Z(t)) = e^{\mu(Z_{gj} - b_g(Z) - r_j(Z))}$.

Las condiciones de optimalidad de $b(Z(t))$ y $r(Z(t))$ en el problema:

$$\Gamma(Z(t)) = \min_{b,r} \sum_{g \in H} H_g b_g + \sum_{j \in I} S_j r_j + \frac{1}{\mu} \sum_{g \in H} \sum_{j \in I} e^{\mu(Z_{gj} - b_g - r_j)}.$$

corresponden a:

$$\begin{aligned} H_g &= \sum_{j \in I} e^{\mu(Z_{gj} - b_g - r_j)} = \sum_{j \in I} H_{gj}(Z(t)) & \forall g \in H \\ S_j &= \sum_{g \in H} e^{\mu(Z_{gj} - b_g - r_j)} = \sum_{g \in H} H_{gj}(Z(t)) & \forall j \in I \end{aligned}$$

de donde se obtiene:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial Z_{hi}}(Z(t)) = H_{hi}(Z(t)).$$

Por otra parte:

$$\frac{\partial Z_{hi}}{\partial t_a}(t) = \frac{\partial B_h^i}{\partial t_a}(b_h, t) = - \sum_{p \in P} \sum_{d \in Q_p^-} N_h^p P_{d/hpi} \frac{\partial \tau_i^{dph}}{\partial t_a}(t).$$

según lo visto en el capítulo 4 a partir de la derivación de (48).

De este modo:

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}(t)}{\partial t_a} = s_a^{-1}(t_a) - \sum_{p \in P} \sum_{d \in Q_p^-} \sum_{h \in H} \sum_{i \in I} \underbrace{H_{hi}(Z(t)) N_h^p P_{d/hpi}}_{g_i^{dph}} \frac{\partial \tau_i^{dph}}{\partial t_a}(t)$$

$$= s_a^{-1}(t_a) - \sum_{p \in P} \sum_{d \in Q_p^-} \sum_{h \in H} v_a^{dph} = s_a^{-1}(t_a) - \tilde{w}_a$$

de donde se obtiene la condición $t_a = s_a(\tilde{w}_a)$ al imponer $\nabla \tilde{\Phi}(t) = 0$. ■

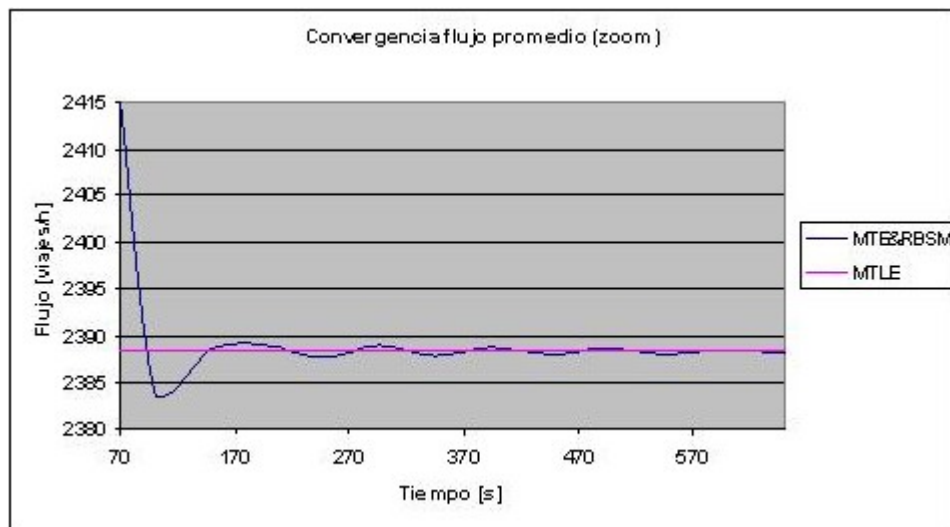


Figura 13: Convergencia Flujo Promedio en Arcos (zoom)